

(0) (0)

Συμειώσεις 670 μάθημα:

Ειδιού θέματα Γεωμετρίας (ΜΑΕ 822)
του Μαθηματικού Τμήματος του

Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

2^{ος} μέρος

Ακαδημαϊκό έτος 2017 - 2018,
εαρινό εξάμηνο

(ο) (ο1)

Αυτές οι συλλογές περιέχουν το πρώτο
μέρος του 2^{ου} κεφαλαίου του μαθήματος.

Στο πρώτο μέρος των συλλογών διατυπώσαμε τον
ακριβή ορισμό των διαφοριτών μορφών.

Ο Σκοπός μας είναι να διατυπώσουμε όλα τα
αναγκαία αποτελέσματα με σκοπό ν' αποδείξουμε τα
δύο βασικά θεωρήματα του μαθήματος τα
οποία είναι:

1^{ον} Το Θεώρημα του Stokes και

2^{ον} Το Λήμμα του Poincaré.

Για να το πετύχουμε αυτό, διατυπώνουμε όλα
τα ενδιαμέσια αποτελέσματα προς τον σκοπό
αυτού σε αυτές εδώ τις συλλογές.

Έτσι για μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
ορίζουμε το διαφοριτικό της df , η οποία είναι
μια 1-διαφορίσιμη μορφή. Επίσης για μια ω
διαφορίσιμη μορφή k -τάξης ορίζουμε το
διαφοριτικό της $d\omega$ το οποίο είναι $(k+1)$ -τάξης

(0) (02)

και επίσης τις για διαφορίσιμη συνάρτηση

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και για μια διαφορίσιμη μορφή ω

ορίζουμε μια νέα διαφορίσιμη μορφή των $f^*(\omega)$

(για την απεικόνιση $f^*(\omega)$ για $\omega \in \Lambda$) η οποία

στην ουσία είναι ένας νόμος αλγεbras μετρήσιμων.

Σε αυτές τις σημειώσεις εδώ δίνουμε όλες τις

βασικές ιδιότητες των παραπάνω διαφορίσιμων μορφών

αφ' f , ενώ για $f^*(\omega)$ οι οποίες είναι, για

αναγκαίες για να αποδείξουμε αργότερα τα θεωρή-

ματα του Stokes και του Poincaré.

Όλες οι αποδείξεις αυτών των σημειώσεων είναι

επτός της εξέτασης αυτής. Έτσι οι μόνες αποδείξεις

που είναι μέση στην εξέταση αυτή είναι αυτές που

αναφέρονται στο πρώτο μέρος των σημειώσεων που σας

έχει ήδη παραδοθεί.

Επίσης έχω περιληφθεί σε αυτές τις σημειώσεις και

υπόλοιπα αποτελέσματα που είναι αναγκαία για

υπόλοιπες αποδείξεις και είναι και αυτά επτός

εξέτασης αυτής. Αυτό αναφέρεται μέση στο μέλλον.

(0) /03)

Έχουν γραφεί όμως ότες οι αποδείξεις ότων των προτάσεων που αναφέρονται, δια όρους ενδιαφέρονται και έχει γίνει ιδιαίτερη προσοχή για να αποδειχθούν λεπτομερώς δια διδαντων λόγους (λόγους κατανοήσιμους από τους φοιτητές).

Όσον αφορά τα θέματα των ελεγχών.

Στις ελέγχσεις θα υπάρχουν 5 θέματα όπου 70 από αυτά θα δοθούν 2 βαθμούς.

Τα 4 από αυτά τα θέματα που θα δοθούν 8 βαθμούς θα έχουν ως εξής:

- 1) Το πρώτο θέμα θα είναι μόνο θεωρία. Δεν θα ζητηθεί απόδειξη. Θα ζητηθεί να δηλώσουν ορισμούς που θεωρούν ή να διατυπώσουν κάποια αποτελέσματα της θεωρίας. Για παράδειγμα: να γραφεί ο ορισμός ενός K -πινυτού, να δοθεί λεπτομερώς ο ορισμός του διαφορίσιμου df μιας διαφορίσιμης συνάρτησης στο σημείο a ή είναι μια 1-μορφή, να δοθεί λεπτομερώς ο ορισμός του διαφορίσιμου μορφής f_u^* (u) για δοσμένης f , u, u κ.τ.λ.
- 2) Το δεύτερο θέμα θα ζητηθεί των

(0) (04)

αποδείξει ότι αποτελείται από την θεωρία του πρώτου μέσου των συλλογισμών

3) Τα θέματα 3 και 4 (που αναζητά ορισμούς ή μονάδες) θα είναι υποχρεωτικές αγωγές παραδείγματα με αυτές που υπάρχουν στα βιβλία: 167 έως 228 αργότερα των συλλογισμών ή στα βιβλία 135 - 152 των πρώτων συλλογισμών (αγωγές 1 και 2) ή αγωγές που θα βρεθούν με το πρώτο ημερολόγιο συλλογισμών.

Οι συλλογισμοί αυτές θα υποβληθούν τη τριτη

μερολήψα: 26 Απριλίου, 3 Μαΐου και 10 Μαΐου 2018.

Για την υποβολή υποχρεωτικών τριτη μερολήψα θα βρεθούν επίσης συλλογισμοί στο τέλος του μήνα Μαΐου 2018.

Κεφάλαιο 2

①

Σε αυτό το κεφάλαιο ο βασικός σκοπός μας είναι να αποδείξουμε κεντρικά αποτελέσματα της θεωρίας των διαφοριικών μορφών.

Αυτά είναι :

1) Το Θεώρημα του Stokes και

2) Το Λήμμα του Poincaré.

Πρόκειται για δύο κεντρικά αποτελέσματα με πολλές και σημαντικές εφαρμογές.

Η πορεία μας για να φτάσουμε σε αυτά τα αποτελέσματα θα είναι η εξής:

α) Θα διατυπώσουμε όλα τα απαραίτητα αποτελέσματα και ορισμούς (οι αποδείξεις είναι εκτός ύλης) με σκοπό να διατυπώσουμε τα παρακάτω αποτελέσματα 1 και 2.

β) Θα αποδείξουμε λεπτομερώς τα παρακάτω

θεωρήματα 1 και 2

γ) Θα δώσουμε όλες τις αποδείξεις των αποτελεσμάτων που θα χρησιμοποιήσουμε στο

(2)

α) αλλά ... θα είναι εντός της διδαγμένης
 ύλης.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε και
 βασικά αποτελέσματα από τη γραμμική :

Απειροστικός Νοχισμός III και Απειροστικός
 Νοχισμός IV.

Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $1 \leq k \leq n$.

Έστω $\omega_1, \omega_2 \in \prod_{p \in \mathbb{P}^n} \Omega^k(\mathbb{P}^n_p)$ να είναι

δύο k -διαφορίσιμες μορφές στον $\mathbb{P}^n$.

Από τις ω_1, ω_2 ορίζουμε (*) για νέα σωρότητα
 $\omega_1 + \omega_2 : \mathbb{P}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{P}^n} \Omega^k(\mathbb{P}^n_p)$ με τον

τόπο: $(\omega_1 + \omega_2)(p) = \omega_1(p) + \omega_2(p)$ για

κάθε $p \in \mathbb{P}^n$. Είναι εύκολο να δούμε ότι:

$\omega_1 + \omega_2 \in \prod_{p \in \mathbb{P}^n} \Omega^k(\mathbb{P}^n_p)$.

(*) Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ορίζεται για τέτοια σωρότητα

③

Επίσης εάν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\omega \in \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^4(\mathbb{R}^n_p)$,

ορίζουμε $\lambda \cdot \omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^4(\mathbb{R}^n_p)$

με τρόπο: $(\lambda \cdot \omega)(p) = \lambda \cdot \omega(p)$ για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι $\lambda \omega \in \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^4(\mathbb{R}^n_p)$.

Ετσι ορίζεται μια πράξη διάνυσμα $(\omega_1, \omega_2) \in \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^4(\mathbb{R}^n_p) \times \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^4(\mathbb{R}^n_p) \rightarrow \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^4(\mathbb{R}^n_p)$

με τρόπο: $+((\omega_1, \omega_2)) = \omega_1 + \omega_2$ για

κάθε $(\omega_1, \omega_2) \in \left(\prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^4(\mathbb{R}^n_p) \right)^2$ και 0

αριθμητικούς πολλαπλασιασμούς:

$\therefore \mathbb{R} \times \left(\prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^4(\mathbb{R}^n_p) \right) \rightarrow \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^4(\mathbb{R}^n_p)$

με τρόπο: $\cdot ((\lambda, \omega)) = \lambda \cdot \omega$, για κάθε

(*) θέλει να σημειωθεί ότι ορίζεται μία τέτοια πράξη και για (-*) (*) το ίδιο

④

$$(\lambda, \omega) \in \mathbb{R} \times \left(\prod_{r \in \mathbb{R}^n} \mathbb{R}^n(\mathbb{R}^n) \right).$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η δομή:

$$\left(\prod_{r \in \mathbb{R}^n} \mathbb{R}^n(\mathbb{R}^n), +, \cdot \right) \text{ είναι διανυσματικός}$$

χώρος (δομής).

Αν $n=1$ παρατηρώ, τότε όπου έχουμε $\mathbb{R}^n(\mathbb{R}^n)$ εννοούμε το σύνολο $\mathcal{T}^n(\mathbb{R}^n)$ σε αυτή την περίπτωση.

Εστω $n \in \mathbb{N}$ και $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι μια συνάρτηση. Εστω $\omega \in \prod_{r \in \mathbb{R}^n} \mathbb{R}^n(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε την

$$\text{συνάρτηση } f \cdot \omega: \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{r \in \mathbb{R}^n} \mathbb{R}^n(\mathbb{R}^n) \text{ με}$$

$$\text{τότε: } (f \cdot \omega)(r) = f(r) \cdot \omega(r) \text{ για κάθε } r \in \mathbb{R}^n.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι: $f \cdot \omega \in \prod_{r \in \mathbb{R}^n} \mathbb{R}^n(\mathbb{R}^n)$.

Έστω $k, l, n \in \mathbb{N}$ με $1 \leq k, l \leq n$ και
 $k+l \leq n$. Έστω $\omega \in \prod_{p \in \mathbb{P}^n} \Omega^k(\mathbb{P}^n_p)$ και

$\eta \in \prod_{p \in \mathbb{P}^n} \Omega^l(\mathbb{P}^n_p)$. Ορίζουμε την n -συνάρτηση

$$\omega \wedge \eta : \mathbb{P}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{P}^n} \Omega^{k+l}(\mathbb{P}^n_p) \text{ με}$$

τοπο: $(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p)$ για κάθε $p \in \mathbb{P}^n$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει:

$$\omega \wedge \eta \in \prod_{p \in \mathbb{P}^n} \Omega^{k+l}(\mathbb{P}^n_p)$$

Επί, ορίζονται οι έννοιες του πολλαπλασιασμού
 συναρτήσεων επί διαφορικών μορφών και του εσωτερικού
 γινομένου διαφορικών μορφών με τα παραπάνω.
 Επίσης εάν $k=1$ τότε δίνω παραπάνω ορίζουμε το
 σύμβολο Ω το αντιπροσωπεύουμε με το Ω .

(*) Θέλει κάποια απόδειξη ότι ορίζεται μια τέτοια
 συνάρτηση

6

Παρατήρηση 2.1

Μπορούμε να ορίσουμε διαφοριές μορφές σε
 δνήδια υποσύνολα του $\mathcal{P}^n$ για $n \in \mathbb{N}$.

Διαισθάνεται έστω $A \subseteq \mathcal{P}^n, A \neq \emptyset$.

Έστω $\omega: \mathcal{P}^n \rightarrow \bigcup_{\varphi \in \mathcal{P}^n} \Sigma^k(\mathcal{P}^n)$ να είναι μια

διαφοριή μορφής. Θεωρούμε τον περιορισμό

$\omega|_A$ της ω στο A . Διαισθάνεται την

$\omega|_A: A \rightarrow \bigcup_{\varphi \in \mathcal{P}^n} \Sigma^k(\mathcal{P}^n)$, με τον ο:

$(\omega|_A)(\varphi) = \omega(\varphi)$ για κάθε $\varphi \in A$.

Τότε αν θεωρήσουμε $\omega(A) = (\omega|_A)(A)$
 να είναι η εικόνα της ω και της $\omega|_A$ στο A ,

διαισθάνεται $\omega(A) = \left\{ \varphi \in \bigcup_{\varphi \in \mathcal{P}^n} \Sigma^k(\mathcal{P}^n) \mid \exists \varphi \in \mathcal{P}^n: \varphi = \omega(\varphi) \right\}$

(το οποίο είναι κατά ορισμό σύνολο από το σύνολο
 της εξειδίκευσης)

(7)

τότε προφανώς ισχύει:

$$(\omega/A)(A) \subseteq \bigcup_{\varphi \in A} \Sigma^4(\mathbb{P}_n^\omega), \text{ αφού } \omega$$

είναι διαφορική μορφή.

Είναι εύκολο τώρα να δείξουμε χρησιμοποιώντας τα αξιώματα της θεωρίας βωέλων όπως κάναμε και με τις διαφορικές μορφές ότι ορίζεται μια μοναδική

βωέλωση $\eta: A \rightarrow \bigcup_{\varphi \in A} \Sigma^4(\mathbb{P}_n^\omega)$ με τοπο:

$\eta(\varphi) = \omega(\varphi)$ για κάθε $\varphi \in A$. Μια τέτοια

βωέλωση την ονομάζουμε η -διαφορική μορφή στο A .

Όλα όσα έχουμε πει για τις διαφορικές μορφές με πεδίο ορισμού το $\mathbb{P}_n^\omega$ ισχύουν και για διαφορικές μορφές με πεδίο ορισμού ένα υποβόλαιο A του $\mathbb{P}_n^\omega$.

Έτσι, για το χαν $A \subseteq \mathbb{P}_n^\omega$, $A \neq \emptyset$, ορίζεται

8

το σύνολο:

$$\prod_{p \in A} \mathcal{Z}^u(\mathbb{P}^n_p) := \left\{ \omega : A \rightarrow \bigcup_{p \in A} \mathcal{Z}^u(\mathbb{P}^n_p) \mid \omega(p) \in \mathcal{Z}^u(\mathbb{P}^n_p) \right\}$$

για κάθε $p \in A$.

Το σύνολο $\prod_{p \in A} \mathcal{Z}^u(\mathbb{P}^n_p)$ είναι το σύνολο των

διαφορετικών μορφών στο A . Αυτό το σύνολο γίνεται επίσης ένας διασυνεχιστικός χώρος με τις πράξεις της πρόσθεσης και του αριθμητικού πολλαπλασιασμού όπως και το $\prod_{p \in \mathbb{P}^n} \mathcal{Z}^u(\mathbb{P}^n_p)$.

Από εδώ και στο εξής όταν θα ορίζουμε τέτοιες διαφορετικές μορφές θα υποθέτουμε ότι το A είναι ένα ακριβές υποσύνολο του $\mathbb{P}^n$. Επίσης όταν $n=1$ όταν παραγγέλνουμε $\mathcal{Z}^u(\mathbb{P}^n_p)$ θα εννοούμε $\mathcal{J}^u(\mathbb{P}^n_p)$.

Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε έννοιες και αποτελέσματα από τον λογισμό διαφορών πολλών μεταβλητών (Απειροστικός λογισμός III και IV).

(9)

Όπως είχαμε στην σελίδα 179 των προηγούμενων σημειώσεων αν $u, v \in M$, $1 \leq n$ και

$$\omega \in \prod_{p \in P^n} \Omega^k(\mathbb{R}^n_p)$$

τότε για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$

$(i_1, i_2, \dots, i_k) \in (T_n^k)^*$ (θυμίζουμε ότι ο ορισμός του συνόλου $(T_n^k)^*$ είναι στην σελίδα 114 των πρώτων σημειώσεων) υπάρχουν συναρτήσεις $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\omega(p) = \sum \omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}(p) \cdot (e_{i_1}^*)_{p} \wedge (e_{i_2}^*)_{p} \wedge \dots \wedge (e_{i_k}^*)_{p}$$

για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$.

Από εδώ και στο εξής θα υποθέτουμε ότι όλες οι συναρτήσεις $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ για όλα τα $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in (T_n^k)^*$ είναι τάξης C^∞ και όταν θα γράφουμε ότι μια συνάρτηση είναι διαφορίσιμη εμείς εδώ θα την υποθέτουμε πάντα ότι είναι και τάξης C^∞ , χωρίς να το αναφέρουμε ρητά κάθε φορά και όταν θα λέμε C^∞ θα εννοούμε ότι είναι C^∞ σε όλο το $\mathbb{R}^n$ ή σε όλο το ανοικτό σύνολο A αν ορίζεται μόνο σε ένα ανοικτό σύνολο A ή ω .

(10)

Έδωκα τώρα ένα ορισμένο $n \in \mathbb{N}$ και

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση.

Τότε το διαφορίτιο $df(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ της f στο $p \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμική συνάρτηση για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$.

Ας σταθεροποιήσουμε ένα $p_0 \in \mathbb{R}^n$.

Ορίσουμε τώρα την συνάρτηση :

$$df(p_0): \mathbb{R}^n_{p_0} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με τοπο:}$$

$$(df(p_0))(u_{p_0}) = (Df(p_0))(u) \quad \text{για κάθε}$$

$u \in \mathbb{R}^n$. Προφανώς, η $df(p_0)$ ορίζεται σε

κάθε $u \in \mathbb{R}^n_{p_0}$, αφού η $Df(p_0)$ ορίζεται σε

όλο το $\mathbb{R}^n$.

$df(p_0)$ είναι γραμμική (η απόδειξη είναι άμεση)

Δείχνουμε ότι η

Ματ' αρχής το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της

$df(p_0)$ είναι διανυσματικοί χώροι, οπότε έχει νόημα

να αναρωτηθούμε εάν η $df(p_0)$ είναι γραμμική συνάρτηση.

11

Έστω $(u_1)_{p_0}, (u_2)_{p_0} \in \mathbb{R}^n_{p_0}$, όπου $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} & (df(p_0))((u_1)_{p_0} + (u_2)_{p_0}) = \\ &= (df(p_0))((u_1 + u_2)_{p_0}) = \\ &= (Df(p_0))(u_1 + u_2) = (Df(p_0))(u_1) + (Df(p_0))(u_2) \\ &= (df(p_0))((u_1)_{p_0}) + (df(p_0))((u_2)_{p_0}). \end{aligned}$$

Επίσης για $u_{p_0} \in \mathbb{R}^n_{p_0}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} & (df(p_0))(\lambda u_{p_0}) = (df(p_0))((\lambda u)_{p_0}) \\ &= (Df(p_0))(\lambda u) = \lambda (Df(p_0))(u) = \\ &= \lambda (df(p_0))(u_{p_0}). \end{aligned}$$

Άρα η $df(p_0)$ είναι γραμμική σπαρτική.

Άρα $df(p_0) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n_{p_0})$.

Παρόμοια για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε την σπαρτική $df(p): \mathbb{R}^n_p \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

$$(df(p))(u_p) = (Df(p))(u) \text{ για κάθε } u_p \in \mathbb{R}^n_p.$$

(12)

Ισχύει η ελπίς πρόταση 2.2.

Πρόταση 2.2

Με τους παραπάνω συμβολισμούς υπάρχει για
 διαφορική 1-μορφή $\omega: \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} T^1(\mathbb{R}^n_p)$

για την οποία ισχύει: $\omega(p) = df(p)$ για κάθε
 $p \in \mathbb{R}^n$. Η διαφορική 1-μορφή ω με αυτή την
 ιδιότητα είναι μοναδική.

Απόδειξη (επὶς ὅλης)

Κατ' αρχὴν ἔχει νόημα νὰ ἀναρωτηθοῦμε εἰς
 υπάρχει μία τέτοια διαφορική 1-μορφή, αφού
 ὅπως δείξαμε ἤρην ισχύει ὅτι $df(p) \in T^1(\mathbb{R}^n_p)$
 για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$.

Για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$ θεωρούμε το μονοσύνολο

$\{df(p)\} \subseteq T^1(\mathbb{R}^n_p)$. Θέτουμε $A_p = \{df(p)\}$ για

κάθε $p \in \mathbb{R}^n$.

Απὸ τὸ ἀξίωμα-σχέσης ἀντιστοιχίας ορίζεται ἡ
 σιμογένεια τῶν συνόλων A_p , για $p \in \mathbb{R}^n$, δηλαδὴ

(13)

το σύνολο $\mathcal{B} := \{A_p, p \in \mathbb{R}^n\}$.

Από το άνωμα της ένωσης ορίζεται το σύνολο

$$\cup \mathcal{B} = \cup_{p \in \mathbb{R}^n} A_p.$$

Αρα ορίζεται το μαρτεγκιανό γινόμενο

$$\prod_{p \in \mathbb{R}^n} A_p. \text{ Αφού } A_p \neq \emptyset \text{ για κάθε } p \in \mathbb{R}^n \text{ έπεται}$$

από το άνωμα της επιλογής ότι $\prod_{p \in \mathbb{R}^n} A_p \neq \emptyset$.

Έστω $\omega \in \prod_{p \in \mathbb{R}^n} A_p$. Τότε $\omega(p) \in A_p$ για

κάθε $p \in \mathbb{R}^n$, από τον ορισμό της ω και άρα ισχύει

$$\text{δηλ. } \omega(p) = \hat{a}f(p) \text{ για κάθε } p \in \mathbb{R}^n.$$

Έστω $\omega_1, \omega_2 \in \prod_{p \in \mathbb{R}^n} A_p$. Από το προηγούμενο έπεται

$$\text{ότι } \omega_1(p) = \hat{a}f(p) = \omega_2(p) \text{ για κάθε } p \in \mathbb{R}^n.$$

Θα δείξουμε τώρα την εύλη παρατηρηση (φυσική από την θεωρία γνώτων).

(14)

Έστω X, ψ να είναι δυο τυχαία σύνολα και
έστω $f_1, f_2 : X \rightarrow \psi$ να είναι δυο συναρτήσεις
τυχαίες από το X στο ψ . Υποθέτουμε ότι ισχύει:
 $f_1(x) = f_2(x)$ για κάθε $x \in X$. Θα δείξουμε ότι
ισχύει: $f_1 = f_2$.

Για κάθε $x \in X$ ορίζεται το μοναδικό $f_1(x) \in \psi$.
Αρα ορίζεται το $\{x\} \times \{f_1(x)\}$. Αφού $f_1(x) \in \psi$
είναι προφανές από τους ορισμούς ότι:

$$\{x\} \times \{f_1(x)\} \subseteq \{x\} \times \psi.$$

Για κάθε $x \in X$ ορίζεται μοναδικά το σύνολο
 $\{x\} \times \{f_1(x)\}$. Αρα από το αξιωματικό-σχήμα
αντιστοιχιστικής ορίζεται το σύνολο

$$\{ \{x\} \times \{f_1(x)\} \mid x \in X \} \text{ με στοιχεία όλα}$$

τα καρτεσιανά γινόμενα της μορφής $\{x\} \times \{f_1(x)\}$
για όλα τα $x \in X$. Από το αξιωματικό της ένωσης
ορίζεται τώρα το σύνολο $\bigcup_{x \in X} (\{x\} \times \{f_1(x)\})$.

(15)

Θα δείξουμε τώρα ότι ισχύει:

$$f_1 = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times \{f_1(x)\}).$$

Έστω $z_0 \in f_1$. Αφού ε'ί' ορισμού $f_1 \subseteq X \times Y$

έπεται ότι υπάρχουν x_0, y_0 με $(x_0, y_0) \in X \times Y$,

$z_0 = (x_0, y_0)$. Ε'ί' ορισμού ισχύει ότι: $y_0 = f_1(x_0)$

από τον ορισμό της f_1 .

Άρα $z_0 = (x_0, f_1(x_0)) \in \{x_0\} \times \{f_1(x_0)\} \subseteq \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times \{f_1(x)\})$

Άρα $z_0 \in \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times \{f_1(x)\})$. Άρα

$$f_1 \subseteq \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times \{f_1(x)\}) \quad (1).$$

Αντίστροφα έστω τυχαίο $z' \in \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times \{f_1(x)\})$.

Τότε από τον ορισμό της ένωσης έπεται ότι υπάρχει $y_0 \in X$: $z' \in \{y_0\} \times \{f_1(y_0)\}$. Είναι

εύκολο να δείξουμε ότι το $\{y_0\} \times \{f_1(y_0)\}$ είναι

μονοσύνολο με μοναδικό στοιχείο το $(y_0, f_1(y_0))$.

(16)

Αρα $z' = (y_0, f_1(y_0)) \in f_1$ από τον
ορισμό της f_1 . Αρα

$$\bigcup_{x \in X} (\{x\} \times \{f_1(x)\}) \subseteq f_1 \quad (2)$$

Από την (1) και (2) έπεται πράγματι ότι ισχύει:

$$f_1 = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times \{f_1(x)\}), \text{ από το αλγόριθμο της ένταξης.}$$

Είδαμε λοιπόν πως γράφεται με τον παραπάνω τρόπο
για συνάρτηση.

Έστω λοιπόν οι συναρτήσεις $f_1, f_2: X \rightarrow Y$ με

$$f_1(x) = f_2(x) \text{ για κάθε } x \in X. \text{ Τότε βέβαια}$$

$$\text{ισχύει ότι: } \{x\} \times \{f_1(x)\} = \{x\} \times \{f_2(x)\} \text{ από}$$

το αλγόριθμο της ένταξης. Αρα από το αλγόριθμο -

σχηματισμού συνάρτησης ορίζονται τα σύνολα

$$\mathcal{B}_1 = \{ \{x\} \times \{f_1(x)\} \mid x \in X \} \text{ και}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{ \{x\} \times \{f_2(x)\} \mid x \in X \} \text{ και ισχύει ότι,}$$

$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ από το παραπάνω και το αλγόριθμο της
ένταξης.

(17)

Από το ανάλυση της ένωσης ορίζεται
 η σύνολα $\cup \beta_1 = \cup \beta_2$ και επειδή $\beta_1 = \beta_2$
 έπεται ότι $\cup \beta_1 = \cup \beta_2$ από το ανάλυση της ένωσης.

$$\text{Αλλά } \cup_{x \in X} \beta_1 = \cup_{x \in X} (\{x\} \times \{f_1(x)\}) = f_1 \text{ και}$$

$$\cup_{x \in X} \beta_2 = \cup_{x \in X} (\{x\} \times \{f_2(x)\}) = f_2 \text{ από το}$$

παράδειγμα και άρα $f_1 = f_2$.

Επίδειξη ότι για δύο συναρτήσεις

$f_1, f_2 : X \rightarrow Y$, ισχύει ότι:

$$f_1 = f_2 \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) \text{ για κάθε } x \in X.$$

Εφαρμόζοντας το παράδειγμα για τις συναρτήσεις
 ω_1, ω_2 στην σχέση 13 έπεται ότι αφού

$$\omega_1(p) = \omega_2(p) = d f(p) \text{ για κάθε } p \in \mathcal{P}_h^u \text{ (όπου}$$

$\mathcal{P}_h^u$ είναι το πεδίο ορισμού των ω_1, ω_2) ισχύει

ότι $\omega_1 = \omega_2$. Επίδειξη ότι υπάρχει μία

μοναδική συνάρτηση $\omega \in \prod_{p \in \mathcal{P}_h^u} A_p$ για την οποία

18
 16. $\omega(p) = d f(p)$ για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$.

Για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$ έχουμε $\omega(p) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \omega(p) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ και άρα

$\{\omega(p)\} \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ και το σύνολο είναι, ότι,

$\{p\} \times \{\omega(p)\} \subseteq \{p\} \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ για

κάθε $p \in \mathbb{R}^n$.

Από το ανώτερο σχήμα αντιστοιχίζοντας, έχουμε ότι
 ορίζεται, τη σύνολα $\{\{p\} \times \{\omega(p)\} \mid p \in \mathbb{R}^n\}$

και $\{\{p\} \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \mid p \in \mathbb{R}^n\}$ και από

το ανώτερο τη κάτω ορίζεται, τη σύνολα:

$\bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} (\{p\} \times \{\omega(p)\})$ και $\bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} (\{p\} \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$.

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι 16.18:

$$\bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} (\{p\} \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)) = \left(\bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \{p\} \right) \times \left(\bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \right)$$

$$= \mathbb{R}^n \times \left(\bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \right)$$

(29)

Από τα παραπάνω έπεται ότι:

$$\bigcup_{p \in \mathbb{P}^n} (\{p\} \times \{\omega(p)\}) \subseteq \bigcup_{p \in \mathbb{P}^n} (\{p\} \times \mathcal{I}'(\mathbb{P}^n_p)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega \subseteq \mathbb{P}^n \times \left(\bigcup_{p \in \mathbb{P}^n} \mathcal{I}'(\mathbb{P}^n_p) \right)$$

Συζητώντας τα παραπάνω έπεται ότι η

$$\omega: \mathbb{P}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{P}^n} \mathcal{I}'(\mathbb{P}^n_p) \text{ η α}$$

$$\omega(p) = df(p) \in \mathcal{I}'(\mathbb{P}^n_p) \text{ για κάθε } p \in \mathbb{P}^n.$$

$$\text{Άρα } \omega \in \prod_{p \in \mathbb{P}^n} \mathcal{I}'(\mathbb{P}^n_p).$$

$$\text{Άρα υπάρχει μια διαφορίσιμη-μορφή } \omega$$

$$\mu \in \omega: \mathbb{P}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{P}^n} \mathcal{I}'(\mathbb{P}^n_p) \text{ για την}$$

$$\text{οποία ισχύει } \omega(p) = df(p) \text{ για κάθε } p \in \mathbb{P}^n.$$

(20)

Α. έχουμε δύο διαφορισιές 1-μορφές
 $\omega_1, \omega_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}'(\mathbb{R}^n_p)$ για τις

οποίες, ισχύει ότι: $\omega_1(p) = df(p)$ και

$\omega_2(p) = df(p)$ για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$, τότε προφανώς

έχουμε ότι: $\omega_1(p) = \omega_2(p)$ για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$

και άρα από αυτό που είπαμε προηγουμένως
έπεται ότι $\omega_1 = \omega_2$.

Άρα αποδείξαμε άμεσως παραπάνω ότι
υπάρχει μια μοναδική διαφορισιή 1-μορφή

$\omega: \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}'(\mathbb{R}^n_p)$ για την οποία

ισχύει ότι: $\omega(p) = df(p)$ για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$. ■

Η μοναδική διαφορισιή 1-μορφή που ορίζεται
από την πρόταση 2.2 συμβολίζεται με df
και ονομάζεται το διαφορικό της
διαφορίσιμης συνάρτησης $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

(21)

Έστω τώρα $n \in \mathbb{N}$. Έστω $i \in T_n$ ορισμένο.
Θεωρούμε την συνάρτηση $x^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$x^i((y_1, y_2, \dots, y_n)) = y_i \text{ για κάθε}$$

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

Η συνάρτηση x^i ονομάζεται n - i -προσβολή
του $\mathbb{R}^n$ και είναι γραμμική (άβυσσος)

Γνωρίζουμε τώρα ότι αν έχουμε μια

γραμμική συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, τότε ισχύει ότι:

$$Df(p) = f \text{ για κάθε } p \in \mathbb{R}^n.$$

Εφαρμόζουμε αυτό για την παραπάνω γραμμική
συνάρτηση x^i , για $i \in T_n$.

Έστω $p \in \mathbb{R}^n$ και $u_p \in \mathbb{R}^n$. Έχουμε
για το διαφορίδιο dx^i της x^i εξ' ορισμού:

$$(dx^i(p))(u_p) = (Dx^i(p))(u) = x^i(u) = u_i$$

όπου $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $u_j \in \mathbb{R}$ για κάθε $j \in T_n$.

Αρα για τη διανυσματική e_j , $j = 1, 2, \dots, n$ της βάσης
του $\mathbb{R}^n$ ($e_j = (0, 0, \dots, \underset{\uparrow}{1}, 0, \dots, 0)$ το 1 είναι j -θέση
για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$).

και παρόμοια αλλιώς 0 για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$).

(22)

έχουμε: για $u = e_j$

$$dx^i(p)((e_j)_p) = x^i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{αν } i=j \\ 0 & \text{αν } j \neq i \end{cases}$$

Απο αυτό και το γεγονός ότι η $dx^i(p)$ είναι γραμμική και το γεγονός ότι για γραμμική συνάρτηση (όπου συμπεριφέρεται ομοιόμορφα) η

$dx^i(p) : \mathbb{R}^n_p \rightarrow \mathbb{R}$ καθορίζεται κατά μοναδικό

τρόπο από τις τιμές της στα διανύσματα των βάσεων που είναι η-άδα $((e_1)_p, (e_2)_p, \dots, (e_n)_p)$

για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$ είναι από τον ορισμό της συνέπης βάσης ότι ισχύει:

$$dx^i(p) = (e_i)^*_p \quad \text{για}$$

κάθε $i \in T_n$ και κάθε $p \in \mathbb{R}^n$.

Αρα από τον ορισμό του διαφορίσιμου dx^i της προβολής x^i του $\mathbb{R}^n$ για $i \in T_n$ έχουμε ότι η

$$dx^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} T'_p(\mathbb{R}^n_p) \quad \text{είναι η}$$

διαφορίσιμη 1-μορφή με τύπο:

$$dx^i(p) = (e_i)^*_p \quad \text{για κάθε } p \in \mathbb{R}^n.$$

(23)

Με βάση τώρα τις διαφοριχές 1-μορφές
αχί για $i \in T_n$ που ορίσαμε προηγουμένα μπορούμε
να εκφράσουμε με τον πιο συμβολικό μο' τις διαφοριχές
μορφές γενικά.

Ας το δούμε.

Διαφοριχές 1-μορφές

Έστω ω να είναι μία διαφορική 1-μορφή τυχαία.
Τότε όπως είδαμε στις σελίδες 129 και 131 των
πρώτων συγγραφέων υπάρχουν συναρτήσεις
 $\omega_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ για $i = 1, 2, \dots, n$ ώστε να ισχύει:

$$\omega(r) = \sum_{i=1}^n \omega_i(r) (e_i)^*_{\mathcal{P}} \quad \text{για κάθε } r \in \mathbb{R}^n.$$

Από τον ορισμό του αθροίσματος διαφορικών
μορφών στην σελίδα 2, ορίζουμε επαγωγικά
το άθροισμα οποιασδήποτε πεπερασμένου πλήθους
διαφορικών μορφών $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ για $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$
ως εξής:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = (\omega_1 + \omega_2) + \omega_3 \quad \text{και εαν έχουμε}$$
$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \sum_{i=1}^3 \omega_i \quad \text{για}$$

ορίζει το άθροισμα $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = \sum_{i=1}^n \omega_i$

υπόλοιπο $n \in \mathbb{N}$, τότε ορίζουμε: (για $n \geq 2$)

$$\sum_{i=1}^{n+1} \omega_i = \sum_{i=1}^n \omega_i + \omega_{n+1} \quad \text{για } n+1 \text{ διαφορικές}$$

(24)

μορφές $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+1}$.

Με βάση και τον ορισμό του γινόμενου εσωτερικού είναι
 διαφορικώς μορφής στην σελίδα 4 και τον ορισμό της
 διαφορικώς μορφής df για C^∞ συναρτήσεις
 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ έχουμε:

~~$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i$~~

$$\omega(p) = \sum_{i=1}^n \omega_i(p) \cdot dx^i(p) =$$

$$= \sum_{i=1}^n (\omega_i \cdot dx^i)(p) = \left(\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot dx^i \right)(p)$$

για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$ και άρα

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i.$$

Διαφορικώς μορφές - 2 στον $\mathbb{R}^3$.

Έστω $\omega \in \bigwedge^2 \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ να είναι για
 $p \in \mathbb{R}^3$

διαφορικώς 2 μορφής στον $\mathbb{R}^3$.

Τότε όπως έχουμε δείξει στην σελίδα 144 των
 ηρώτων συμπεράσεων υπάρχουν συναρτήσεις
 $\omega_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ για $i=1,2,3$ ώστε να ισχύει:

(25)

$$\omega(p) = \omega_1(p) \cdot ((e_1)_p^* \wedge (e_2)_p^*) + \\ + \omega_2(p) \cdot ((e_2)_p^* \wedge (e_3)_p^*) + \omega_3(p) \cdot ((e_1)_p^* \wedge (e_3)_p^*) \\ \text{για κάθε } p \in \mathbb{R}^3.$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς του αθροίσματος διαφορίων μορφών, υποθέτουμε συνάρτηση επί διαφορίων μορφών και επωτερίως υποθέτουμε διαφορίων μορφών που ορίσαμε στα βελδεις 2, 4 και 5 παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \omega(p) &= \omega_1(p) \cdot (dx^1(p) \wedge dx^2(p)) + \\ &+ \omega_2(p) \cdot (dx^2(p) \wedge dx^3(p)) + \\ &+ \omega_3(p) \cdot (dx^1(p) \wedge dx^3(p)) = \\ &= \omega_1(p) \cdot (dx^1 \wedge dx^2)(p) + \omega_2(p) \cdot (dx^2 \wedge dx^3)(p) \\ &+ \omega_3(p) \cdot (dx^1 \wedge dx^3)(p) = \\ &= (\omega_1 \cdot (dx^1 \wedge dx^2))(p) + (\omega_2 \cdot (dx^2 \wedge dx^3))(p) \\ &+ (\omega_3 \cdot (dx^1 \wedge dx^3))(p) = \\ &= (\omega_1 \cdot (dx^1 \wedge dx^2) + \omega_2 \cdot (dx^2 \wedge dx^3) + \omega_3 \cdot (dx^1 \wedge dx^3))(p) \end{aligned}$$

για κάθε $p \in \mathbb{R}^3$ και άρα ισχύει:

$$\omega = \omega_1 \cdot (\partial x^1 \wedge \partial x^2) + \omega_2 \cdot (\partial x^2 \wedge \partial x^3) + \omega_3 \cdot (\partial x^1 \wedge \partial x^3).$$

Αυτή είναι η τυπική μορφή με την οποία θα γράφου με τις διαφορικές 2-μορφές στον $\mathbb{R}^3$.
Παρόμοια για διαφορικές 2-μορφές στον $\mathbb{R}^2$
 γράφεται στην μορφή:

$$\omega = \omega_1 \cdot (\partial x^1 \wedge \partial x^2) \quad \text{όπου } \omega_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι μια συνάρτηση.

Επίσης για τις διαφορικές 3-μορφές στον $\mathbb{R}^3$

γράφεται ως εξής:

$$\omega = \omega_1 \cdot (\partial x^1 \wedge \partial x^2 \wedge \partial x^3) \quad \text{όπου}$$

$\omega_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση.

Με παρόμοιο τρόπο χρησιμοποιώντας τις διαφορικές 1-μορφές ∂x^i για $i \in \mathbb{N}$

μπορούμε να εκφράσουμε με τυπική ορολογία οποιεσδήποτε διαφορική μορφή.

Με τον επόμενο πρόταξη μπορούμε να εκφράσουμε το διαφορικό μιας συνάρτησης βλ. συνάρτησης των διαφορικών μορφών ∂x^i , $i=1,2,\dots,n$.

Πρόταση 2.3

Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι για διαφορίσιμη
 συνάρτηση για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε ισχύει:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx^n =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i.$$

Απόδειξη (ευθεία ύλη)

Έστω $p \in \mathbb{R}^n$ και $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ τυχαία
 διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Είναι γνωστό από τον
 αντιστοιχισμό λογισμό III

$$\text{ότι } (Df(p))(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot u_i \quad (1)$$

Έστω τώρα τυχόν $p, u \in \mathbb{R}^n$ με $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Από τον ορισμό της df έχουμε: (από την (1))

$$\begin{aligned} (df(p))(u_p) &= (Df(p))(u) = \overset{(*)}{\nabla f(p)} \cdot u \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot u_i \quad (2). \end{aligned}$$

εσωτερικό
 γινόμενο

(*) όπου $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$ η γλίσσα
 $\nabla f(p)$ της f στο p

(28)

Επίσης έχουμε:

$$(\partial x^i(p))(u_p) = (Dx^i(p))(u) = \nabla x^i(p) \cdot u = \\ = x^i(u) = u_i \quad \text{για κάθε } i=1,2,\dots,n(3).$$

Από τις (2) και (3) παίρνουμε:

$$(\partial f(p))(u_p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot (\partial x^i(p))(u_p) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot \partial x^i(p) \right)(u_p) \quad \text{για κάθε } u_p \in T_p(M)$$

$$\text{Άρα έχουμε ότι: } \partial f(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot \partial x^i(p) \text{ από}$$

τη (5).

Από τον ορισμό του αθροίσματος διαφορίων μορφών
και του δισημέριου συναρτήσεων επί διαφορίων μορφών

παίρνουμε:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \cdot \partial x^i(p) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \partial x^i \right)(p) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \partial x^i \right) \right)(p) \quad (6).$$

(29)

Από την (5) και (6) που ισχύουν για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$
 παίρνουμε ότι: $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx^i$, δηλαδή

το διζεύκτηνο ■

Μια συνδαία μετασχημάτιση, ονομάζεται στην περίπτωση
 των δυϊκών χώρων γενικεύεται για U -τάνυστες.

Ας την δούμε, γιατί θα την χρησιμοποιήσουμε
 ουσιωδώς στην συνέχεια.

Έστω V, W να είναι δυο οποιαδήποτε
 διανυσματικοί χώροι (παρατεταμένοι ή άπειροι
 διάστασης) και έστω $f: V \rightarrow W$ να είναι μια

οποιαδήποτε γραμμική συνάρτηση.

Σταθεροποιούμε τα δεδομένα V, W, f όπως
 παραπάνω για την συνέχεια.

Ενδεχομένως τώρα μια οποιαδήποτε
 n -γραμμική συνάρτηση (U -τάνυστή) $T \in \mathcal{T}^n(W)$

για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τυχαίο. Ορίζουμε τώρα
 την συνάρτηση $g: V^n \rightarrow \mathbb{R}$ με τονο:

(30)

$$g(u_1, u_2, \dots, u_n) = T(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) \quad (*)$$

για κάθε $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in V^n$.

Ματ' αρχής για κάθε $u_i \in V$ έχουμε ότι

$f(u_i) \in W$ από τον ορισμό της f και άρα

$(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) \in W^n$. Αφού η

$T: W^n \rightarrow \mathbb{R}$ έχει ορισμό ορισμού του W^n

γιατί $T \in \mathcal{T}^n(W)$ (εί' ορισμού της T) ορίζεται

να λή ο πραγματικός αριθμός $T(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$

για κάθε $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in V^n$.

Άρα η συνάρτηση g είναι καλά ορισμένη.

Θα δείξουμε τώρα ότι η g είναι ένας n -γραμμοειδής.

Εστω τυχαία $u_1, u_2, \dots, u_n, u'_1, \dots, u'_n \in V$ με $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

και $u'_i \in V$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} & g(u_1, u_2, \dots, u_i + u'_i, \dots, u_n) \stackrel{\text{ορισμός της } g}{=} \\ & = T(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_i + u'_i), \dots, f(u_n)) \stackrel{f \text{ γραμμοειδής}}{=} \\ & = T(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_i) + f(u'_i), \dots, f(u_n)) \stackrel{T \in \mathcal{T}^n(W)}{=} \end{aligned}$$

$=$

(*) η απόδειξη ότι η g είναι n -γραμμοειδής είναι εύκολη

(31)

$$\begin{aligned}
 &= T(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_i), \dots, f(u_n)) + \\
 &+ T(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_i), \dots, f(u_n)) = \\
 &\stackrel{\text{ορισμός του } g}{=} g(u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n) + g(u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n) =
 \end{aligned}$$

Προφανώς η (1) ισχύει για κάθε $i=1, 2, \dots, n$ και για οποιαδήποτε διάνυσματα $u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n$

και $u_i \in V$.
 Έστω τώρα, τα διάνυσματα $u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n \in V$
 και $\lambda \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 &g(u_1, u_2, \dots, \lambda u_i, \dots, u_n) \stackrel{\text{ορισμός του } g}{=} \\
 &= T(f(u_1), f(u_2), \dots, f(\lambda u_i), \dots, f(u_n)) \stackrel{T\text{-ομομορφία}}{=} \\
 &\stackrel{\text{τεστ } (u)}{=} T(f(u_1), f(u_2), \dots, \lambda f(u_i), \dots, f(u_n)) = \\
 &= T(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_i), \dots, f(u_n)) \stackrel{\text{ορισμός του } g}{=} \\
 &= \lambda \cdot T(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_i), \dots, f(u_n)) \\
 &= \lambda \cdot g(u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n) \quad (2)
 \end{aligned}$$

αφού η (2) ισχύει για κάθε $u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n \in V$
 και $\lambda \in \mathbb{R}$ και ισχύει και η (1) έπεται ότι $g \in \mathcal{T}^n(V)$
 από τον ορισμό του n -ταυστη στον V .

(22)
 Έτσι για κάθε $T \in \mathcal{T}^4(W)$ η εωδρπβη ηου
 ορίηεται βμ (*) είναι η $g \in \mathcal{T}^4(V)$.

Αρα από τα παραπάνω ορίηεται καλώς η
 εωδρπβη ηου ημ συμβολίζουμε με f_{μ}^* με
 $f_{\mu}^* : \mathcal{T}^4(W) \rightarrow \mathcal{T}^4(V)$ η οποια βε
 καθε $T \in \mathcal{T}^4(W)$ αντιστοιχίηει ημ $f_{\mu}^*(T)$ με

ηόηη:
 $(f_{\mu}^*(T))(u_1, u_2, \dots, u_n) = T(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))$
 για καθε $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in V^4$ καη όηωη δείηαηηε

$f_{\mu}^*(T) \in \mathcal{T}^4(V)$ για καθε $T \in \mathcal{T}^4(W)$.

Ιαχβει ηώρα με ηουη παραπάνω συμβολιηηωών καη
 οροηηηη η είηη ηρόηαβη:

Πρόηαβη 2.4

Η παραπάνω εωδρπβη $f_{\mu}^* : \mathcal{T}^4(W) \rightarrow \mathcal{T}^4(V)$
 είναι γραηηηηη.

Απόδειξη (ευρώη όηηη)

(33)

Έστω $T_1, T_2 \in \mathcal{T}^4(W)$.

Ενδεχομένως υπάρχουν $u_1, u_2, \dots, u_4 \in V$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & (f_u^*(T_1 + T_2))(C u_1, u_2, \dots, u_4) \quad \underline{\text{ορισμός για } f_u^*(T_1 + T_2)} \\
 &= (T_1 + T_2)((f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_4))) \quad \underline{\text{ορισμός για } T_1 + T_2} \\
 &= T_1((f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_4))) + \\
 &\quad + T_2((f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_4))) \quad \underline{\text{ορισμός } f_u^*(T_1) \text{ και } f_u^*(T_2)} \\
 &= (f_u^*(T_1))(C u_1, u_2, \dots, u_4) + \\
 &\quad + (f_u^*(T_2))(C u_1, u_2, \dots, u_4) \quad \underline{\text{ορισμός } f_u^*(T_1) + f_u^*(T_2)} \\
 &= (f_u^*(T_1) + f_u^*(T_2))(C u_1, u_2, \dots, u_4) \quad (1)
 \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε:

$f_u^*(T_1) + f_u^*(T_2) \in \mathcal{T}^4(V)$, αφού $f_u^*(T_1), f_u^*(T_2) \in \mathcal{T}^4(V)$ και το $\mathcal{T}^4(V)$ είναι διανυσματικός χώρος.

Από την (1) έπεται ότι: $f_u^*(T_1 + T_2) = f_u^*(T_1) + f_u^*(T_2)$ για κάθε $T_1, T_2 \in \mathcal{T}^4(W)$.

(34)

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\tau \in \mathcal{T}^4(W)$.

Έστω $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & (f_n^*(\lambda\tau))((u_1, u_2, \dots, u_n)) \xrightarrow{\text{ορισμός της } f_n^*(\lambda\tau)} \\
 &= (\lambda\tau)((f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))) \xrightarrow{\text{ορισμός της } \lambda\tau} \\
 &= \lambda \cdot (\tau((f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)))) \xrightarrow{\text{ορισμός της } f_n^*(\tau)} \\
 &= \lambda \cdot (f_n^*(\tau))((u_1, u_2, \dots, u_n)) \xrightarrow{\text{ορισμός της } \lambda \cdot f_n^*(\tau)} \\
 &= (\lambda \cdot f_n^*(\tau))((u_1, u_2, \dots, u_n)) \quad (2)
 \end{aligned}$$

Αφού η (2) ισχύει για κάθε $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in V^n$, έπεται
 ότι: $f_n^*(\lambda\tau) = \lambda \cdot f_n^*(\tau)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\tau \in \mathcal{T}^4(W)$.
 Άρα η f_n^* είναι γραμμική σωδέρτηση. ■

Παρατήρηση 2.5

Η σωδέρτηση f_n^* δεν ε)αρτάται μόνο από από την
 σωδέρτηση f , αλλά και από τον φυσικό αριθμό n .
 Έτσι ψε θέλει την f για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζεται
 και από μια σωδέρτηση $f_n^*: \mathcal{T}^4(W) \rightarrow \mathcal{T}^4(V)$ ψε
 π)νο:

$$(f_n^*(\tau))((u_1, u_2, \dots, u_n)) = \tau((f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)))$$

για κάθε $\tau \in \mathcal{T}^4(W)$, και για κάθε $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in V^n$.

(35)

Έτσι, για να είχαμε πιο τυλιχοί θα έπρεπε να γράφουμε f^* , για $u=1,2,\dots$ αντί για f^* , αφού πρόκειται για διαφορετικές συναρτήσεις.

Όταν όμως έχουμε σταθεροποιήσει κάποιο $u \in \mathbb{N}$ σε κάποιο πρόβλημα που μελετούμε, θα γράφουμε αντί f^* , αντί του πιο ορθού f_u^* , υπονοώντας όμως βιωμερικά ότι εννοούμε το συγκεκριμένο f_u^* πάντα για δεδομένο u , για απώτερη συμβολισμό. Ας δούμε πως θα χρησιμοποιήσουμε εμείς εδώ τον προηγούμενο ορισμό.

Ξεκινάμε με μια ορισμένη διαφορίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ για κάποιον ορισμένο $n, m \in \mathbb{N}$.

Ας σταθεροποιήσουμε ένα $p_0 \in \mathbb{R}^n$.

Θα λέται τώρα το διαφορίσιμο $Df(p_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Ας πάρουμε ένα $u \in \mathbb{R}^n$. Τότε το

$(Df(p_0))(u) \in \mathbb{R}^m$. Προφανώς $f(p_0) \in \mathbb{R}^m$. Άρα

ορίζεται το $\left((Df(p_0))(u) \right)_{f(p_0)} \in \mathbb{R}^m_{f(p_0)}$.

(36)

Ορίζουμε τώρα την βωδρτυβη

$$f_*^{p_0} : \mathcal{P}_{p_0}^n \rightarrow \mathcal{P}_{f(p_0)}^m \text{ με τύπο:}$$

$$f_*^{p_0}(u_{p_0}) = ((Df(p_0))(u))_{f(p_0)} \quad \text{για κάθε}$$

$$u_{p_0} \in \mathcal{P}_{p_0}^n.$$

Πρόταση 2.6

Η βωδρτυβη $f_*^{p_0}$ που ορίσαμε προηγούμενα είναι γραμμική.

Απόδειξη (Ευτός άνω)

Έστω $(u_1)_{p_0}, (u_2)_{p_0} \in \mathcal{P}_{p_0}^n$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f_*^{p_0}((u_1)_{p_0} + (u_2)_{p_0}) &= f_*^{p_0}((u_1 + u_2)_{p_0}) \\ &= ((Df(p_0))(u_1 + u_2))_{f(p_0)} = \\ &= ((Df(p_0))(u_1) + (Df(p_0))(u_2))_{f(p_0)} = \\ &= ((Df(p_0))(u_1))_{f(p_0)} + ((Df(p_0))(u_2))_{f(p_0)} \\ &= f_*^{p_0}((u_1)_{p_0}) + f_*^{p_0}((u_2)_{p_0}) \quad (1) \end{aligned}$$

Εστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $u_{p_0} \in \mathbb{R}^n_{p_0}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} f_*^{p_0}(\lambda \cdot u_{p_0}) &= f_*^{p_0}((\lambda u)_{p_0}) = \\ &= ((Df(p_0))(\lambda u))_{f(p_0)} = (\lambda \cdot (Df(p_0))(u))_{f(p_0)} \\ &= \lambda \cdot ((Df(p_0))(u))_{f(p_0)} = \lambda \cdot f_*^{p_0}(u_{p_0}) \quad (2). \end{aligned}$$

Οι (1) και (2) μας λέει απλώς ότι η $f_*^{p_0}$ ή f_* είναι γραμμική σπαρτική. ■

Η σπαρτική $f_*^{p_0}$ που ορίσαμε παραπάνω δεν εξαρτάται μόνο από την f αλλά και από το συγκεκριμένο $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Έτσι πιο τυπικά ορίζεται η σπαρτική

$$f_*^{p_0} : \mathbb{R}^n_{p_0} \rightarrow \mathbb{R}^m_{f(p_0)} \text{ με τύπο:}$$

$$f_*^{p_0}(u_{p_0}) = ((Df(p_0))(u))_{f(p_0)} \text{ για}$$

κάθε $u_{p_0} \in \mathbb{R}^n_{p_0}$. Όταν όμως το p_0 είναι γνωστό στο πρόβλημα που μελετούμε θα γράφουμε πιο

(28)

Αλλά f_* αυτή για $f_*^{p_0}$ για ανάλυση συμβολισμών.
Έστω τώρα V, W να είναι δυο οποιαδήποτε
διανυσματικοί χώροι και $f: V \rightarrow W$ να είναι
μία γραμμική σάρτηση. Θεωρούμε την σάρτηση
 $f^*: \mathcal{L}^k(W) \rightarrow \mathcal{L}^k(V)$ που ορίσαμε
προηγουμένως. Ισχύει τώρα το εξής λήμμα:

Λήμμα 2.7

Ο περιορισμός $f^*|_{\mathcal{L}^k(W)}: \mathcal{L}^k(W) \rightarrow \mathcal{L}^k(V)$

της f^* στο $\mathcal{L}^k(W)$ παίρνει τιμές στο $\mathcal{L}^k(V)$.

Απόδειξη (από άνω)

Έστω $T \in \mathcal{L}^k(W)$. Θα δείξουμε ότι:

$f^*(T) \in \mathcal{L}^k(V)$. Φυσικά το λήμμα έχει νόημα όταν

$k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 2$, αφού για $k=1$ δεν ορίζεται το

σύνολο $\mathcal{L}^k(W)$.

Έστω $(u_1, u_2, \dots, u_k) \in V^k$ και $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ με $i < j$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} (f^*(T))((u_1, u_2, \dots, u_k)) &= (f^*(T))((u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_k)) \\ &\stackrel{\text{από } f^*}{=} T((f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_i), \dots, f(u_j), \dots, f(u_k))) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow T \in \Omega^k(W) \\ & = -T(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_j), \dots, f(u_i), \dots, f(u_n)) = \\ & = - (f_u^*(T)) (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n) \text{ για} \end{aligned}$$

υπόθε $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ με $i < j$.

Άρα αφού $f^*(T) \in \mathcal{T}^k(V)$ έπεται από το
παράγωγο ότι $f^*(T) \in \Omega^k(V)$. ■

Έστω τώρα $n, m \in \mathbb{N}$ και $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ να είναι
μία διαφορίσιμη συνάρτηση.

Εξαθεροποιούμε ένα $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Έστω u
συνάρτηση $f_{*}^{p_0}: \mathbb{R}_{p_0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{f(p_0)}^m$ που ορίσαμε
στην σελίδα 37. Η $f_{*}^{p_0}$ είναι γραμμική από την
πρόταση 2.6.

Άρα η $f_{*}^{p_0}$ ενδείξει των γραμμικών συνάρτησης

$$(f_{*}^{p_0})^*: \Omega^k(\mathbb{R}_{f(p_0)}^m) \rightarrow \Omega^k(\mathbb{R}_{p_0}^n) \text{ από το}$$

προηγούμενο λήμμα 2.7 και την πρόταση 2.4,
για $k \leq \min\{n, m\}$.

(40)

As πέρουμε τώρα για κ-μορφές στον $\mathbb{R}^m$ την
 ω , με $k \leq m$, $k \geq 1$

Από το προηγούμενο για κάθε συνάρτηση

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη, ορίζεται για κάθε

$p \in \mathbb{R}^n$ η γραμμική συνάρτηση

$$(f_*^p)^* : \Omega^k(\mathbb{R}^m_{f(p)}) \rightarrow \Omega^k(\mathbb{R}^n_p) \text{ όπως πριν.}$$

Έτσι αν σταθεροποιήσουμε την διαφορίσιμη
 συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και ένα $k \in \mathbb{N}$, τότε
 για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται η γραμμική
 συνάρτηση $(f_*^p)^*$.

Έστω $p \in \mathbb{R}^n$. Τότε $f(p) \in \mathbb{R}^m$. Άρα για
 την διαφορίσιμη κ-μορφή ω στον $\mathbb{R}^m$ ορίζεται ο
 κ-ταύστης $\omega(f(p)) \in \Omega^k(\mathbb{R}^m_{f(p)})$ και

όρα ορίζεται ο κ-ταύστης

$$((f_*^p)^*) (\omega(f(p))) \in \Omega^k(\mathbb{R}^n_p).$$

(41)

Αρα για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται, όπως πριν

$$\circ \text{ η-ταυτοποίηση } ((f_p^*)^*) (\omega(f(p))) \in \Sigma^k(\mathbb{R}^n_p)$$

Ορίζεται (*) έτσι για συνάρτηση που την συμβολίζουμε

$$\text{με } f_u^*(\omega) : \mathbb{R}^n \rightarrow \cup_{p \in \mathbb{R}^n} \Sigma^k(\mathbb{R}^n_p) \text{ με τήνο:}$$

$$(f_u^*(\omega))(p) = ((f_p^*)^*) (\omega(f(p))) \text{ για}$$

κάθε $p \in \mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας το αβαντάζ της

θεωρίας γνώων όπως κάναμε με τις διαφορικές μορφές

αποδεικνύουμε ότι ορίζεται κατ'ελάχιστον η συνάρτηση

$$f_u^*(\omega) \in \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Sigma^k(\mathbb{R}^n_p) \text{ η οποία είναι βέβαια}$$

για διαφορική η-μορφή στο $\mathbb{R}^n$ με τον

$$\tauήνο: (f_u^*(\omega))(p) = ((f_p^*)^*) (\omega(f(p))) \text{ για κάθε}$$

$$p \in \mathbb{R}^n.$$

(*)Θέλει κάποιος αποδείξει ότι ορίζεται για τυχόν συνάρτηση

(42)

Άρα με την προηγούμενη διαδικασία από εδώ
 η-διαφορική μορφή ως $\prod \Omega^k(\mathbb{R}^m)$ ορίζεται

για νέα διαφορική μορφή που $q \in \mathbb{R}^m$ των συμβολισμών
 με $f_k^*(\omega) \in \prod \Omega^k(\mathbb{R}^n)$
 $r \in \mathbb{R}^n$

Με βάση την προηγούμενη μαθηματική μπορούμε να
 ορίσουμε μια συνάρτηση: (θέλει κάποια απόδειξη)

$$f_k^* : \prod_{r \in \mathbb{R}^m} \Omega^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \prod_{r \in \mathbb{R}^n} \Omega^k(\mathbb{R}^m)$$

η οποία σε κάθε $\omega \in \prod_{r \in \mathbb{R}^m} \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ αντιστοιχεί

στοιχίζει την διαφορική μορφή

$$f_k^*(\omega) \in \prod_{r \in \mathbb{R}^n} \Omega^k(\mathbb{R}^m).$$

(43)

Η συνάρτηση f^* που ορίστηκε προηγουμένως
 έχει κάποιες ιδιότητες. Θα αρχίσω είναι γραμμική
 όταν θεωρούμε τα σύνολα των διαφορίμων
 μορφών $\prod_{\mathcal{P} \in \mathcal{R}^m} \Omega^u(\mathcal{P})$ και $\prod_{\mathcal{P} \in \mathcal{R}^n} \Omega^u(\mathcal{P})$ σαν

διανυσματικούς χώρους ως προς το πηλίκο και την
 πρόσθεση και του αριθμητικού πολλαπλασιασμού
 που έχουμε ορίσει σε αυτή τη σύνολα.

Πρόταση 2.8

Με τους παραπάνω συμβολισμούς η συνάρτηση
 f^* που ορίσαμε στην σελίδα 42 είναι γραμμική.
Απόδειξη (ευθείας)

Έστω $\omega_1, \omega_2 \in \prod_{\mathcal{P} \in \mathcal{R}^m} \Omega^u(\mathcal{P})$

Σταθεροποιούμε ένα $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{R}^n$.

Αφού $\omega_1, \omega_2 \in \prod_{\mathcal{P} \in \mathcal{R}^m} \Omega^u(\mathcal{P})$ και το σύνολο

$\prod_{\mathcal{P} \in \mathcal{R}^m} \Omega^u(\mathcal{P})$ είναι διανυσματικός χώρος

(44)

έπεται ότι $\omega_1 + \omega_2 \in \Pi \Sigma^u(\mathbb{R}^m_p)$.
 $p \in \mathbb{R}^m$

Αφού η f_u^* έχει πεδίο ορισμού τον
 διανυσματικό χώρο $\Pi \Sigma^u(\mathbb{R}^m_p)$ και
 $p \in \mathbb{R}^m$

$\omega_1 + \omega_2 \in \Pi \Sigma^u(\mathbb{R}^m_p)$ έπεται ότι ορίζεται
 $p \in \mathbb{R}^m$

η u -διαφορίσιμη μορφή $f_u^*(\omega_1 + \omega_2) \in \Pi \Sigma^u(\mathbb{R}^n_p)$.
 $p \in \mathbb{R}^n$

Αρα για το σταθεροποιημένο $p_0 \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται
 ο u -ταυτοδύναμος $(f_u^*(\omega_1 + \omega_2))(p_0) \in \Sigma^u(\mathbb{R}^n_{p_0})$

Από τον ορισμό της διαφορίσιμης μορφής

$f_u^*(\omega_1 + \omega_2)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (f_u^*(\omega_1 + \omega_2))(p_0) &= (f_{*}^{p_0})^* \left((\omega_1 + \omega_2)(f(p_0)) \right) \\ &= (f_{*}^{p_0})^* \left(\omega_1(f(p_0)) + \omega_2(f(p_0)) \right) \end{aligned}$$

$\underbrace{(f_{*}^{p_0})^* \text{ είναι γραμμική}}_{\text{γραμμική}}$

$\uparrow$
 ορισμός της $\omega_1 + \omega_2$

(45)

$$\begin{aligned} & (f_{*}^{p_0})^* (\omega_1 (f(p_0))) + (f_{*}^{p_0})^* (\omega_2 (f(p_0))) \\ & \xrightarrow{\text{ορισμός της } f_{*}^*} (f_{*}^* (\omega_1)) (p_0) + (f_{*}^* (\omega_2)) (p_0) \xrightarrow{\text{ορισμός του } f_{*}^* (\omega_1) + f_{*}^* (\omega_2)} \\ & = (f_{*}^* (\omega_1) + f_{*}^* (\omega_2)) (p_0) \quad (1). \end{aligned}$$

$$= (f_{*}^* (\omega_1) + f_{*}^* (\omega_2)) (p_0) \quad (1).$$

Η (1) ισχύει για το τοχόν σταθεροποιημένο $p_0 \in \mathbb{P}^n$.

Άρα για κάθε $p \in \mathbb{P}^n$ έχουμε ότι:

$$(f_{*}^* (\omega_1 + \omega_2)) (p) = (f_{*}^* (\omega_1) + f_{*}^* (\omega_2)) (p) \quad \text{και}$$

επειδή οι $f_{*}^* (\omega_1 + \omega_2)$ και $f_{*}^* (\omega_1) + f_{*}^* (\omega_2)$ είναι

συναρτήσεις ως διαφορίτες μορφές έπεται ότι:

$$f_{*}^* (\omega_1 + \omega_2) = f_{*}^* (\omega_1) + f_{*}^* (\omega_2) \quad \text{για κάθε}$$

$$\omega_1, \omega_2 \in \Pi \Omega^k(\mathbb{P}^n_p).$$

$$\text{Έστω τώρα } \lambda \in \mathbb{P}^n \text{ και } \omega \in \Pi \Omega^k(\mathbb{P}^n_p)$$

$$\text{Προφανώς το } \lambda \omega \in \Pi \Omega^k(\mathbb{P}^n_p) \text{ αφού το}$$

$$\text{σύνολο } \Pi \Omega^k(\mathbb{P}^n_p) \text{ είναι διανυσματικός χώρος.}$$

(46)

Έτσι αφού η συνάρτηση f^* έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\pi \Sigma^n(\mathbb{R}^n)$ και η

διαφορικη μορφή $\lambda \omega$ ανήκει στο αυτό το σύνολο έπεται ότι ορίζεται καλά η διαφορικη μορφή $f^*(\lambda \omega) \in \pi \Sigma^n(\mathbb{R}^n)$.

Σταθεροποιούμε τώρα ένα $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Ορίζεται τώρα καλά ο μετασχηματισμός $(f^*(\lambda \omega))(p_0) \in \Sigma^n(\mathbb{R}^{p_0})$.

Υπολογίζουμε τώρα ορισμούς f^*

$$\begin{aligned} (f^*(\lambda \omega))(p_0) &= (f^*)^*_{p_0}((\lambda \omega)(f(p_0))) \quad \text{ορισμός } \lambda \omega \\ &= (f^*)^*_{p_0}(\lambda \cdot \omega(f(p_0))) \quad \text{η } (f^*)^*_{p_0} \text{ είναι γραμμική} \\ &= \lambda \cdot ((f^*)^*_{p_0}(\omega(f(p_0)))) \quad \text{ορισμός της } f^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lambda \cdot ((f^*(\omega))(p_0)) = (\lambda \cdot f^*(\omega))(p_0) \quad (2) \end{aligned}$$

Αφού η (2) ισχύει για το γινόμενο $p_0 \in \mathbb{R}^n$, έπεται ότι ισχύει για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$.

(47)

Άρα από την (2) παίρνουμε ότι:

$$(f_n^*(\lambda\omega))(p) = (\lambda \cdot f_n^*(\omega))(p) \text{ για κάθε } p \in \mathbb{R}^n$$

και αφού οι $f_n^*(\lambda\omega)$ και $\lambda \cdot f_n^*(\omega)$ είναι

συναρτήσεις (ως διαφορίσιμες υ-μορφές επί ορίσμων)

έπεται ότι: $f_n^*(\lambda\omega) = \lambda \cdot f_n^*(\omega)$. Αφού αυτός

ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $\omega \in \Pi \Sigma^n(\mathbb{R}^n)$

έπεται τελικά ότι f_n^* είναι γραμμικός

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. ■

Στην συνέχεια ακολουθούν άλλες 3 αμέσως προκύπτουσες
που περιγράφουν ιδιότητες των συναρτήσεων f_n^* .

Πρόταση 2.9

Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ να είναι μια διαφορίσιμη
συνάρτηση για $n, m \in \mathbb{N}$. Έστω $x^i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ να

είναι η i -προβολή του $\mathbb{R}^m$ για κάθε $i=1, 2, \dots, m$.

Συμβολίζουμε με f_i , $i=1, 2, \dots, m$, $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ τις

μερικές συναρτήσεις της f , δηλαδή

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$$

για κάθε $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

και ισχύει: $f_i = x^{i_0} f$ για κάθε $i=1, 2, \dots, m$. (48)

Τότε ισχύει:

$$f_1^* (dx^i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx^j \quad \text{για κάθε}$$

$$i=1, 2, \dots, m$$

Απόδειξη (επ' αόριστο)

Ας σταθεροποιήσουμε ένα $i_0 \in T_m$ και θα δείξουμε το ζητούμενο αποτελεσμα για $i=i_0$.

Σταθεροποιούμε ένα $p_0 \in \mathbb{R}^n$.

Η διαφορική 1-μορφή dx^{i_0} ανήκει στο

$$\prod \mathcal{T}^1(\mathbb{R}_p^m), \text{ Άρα αφού η βωφρην}$$

$$p \in \mathbb{R}^m$$

f_1^* έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$\prod \mathcal{T}^1(\mathbb{R}_p^m) \text{ έπεται ότι ορίζεται η διαφορική}$$

$$p \in \mathbb{R}^m$$

$$1\text{-μορφή} \quad f_1^* (dx^{i_0}) \in \prod \mathcal{T}^1(\mathbb{R}_p^n) \text{ και}$$

$$p \in \mathbb{R}^n$$

(49)

άρα ο 1-ανυσματός $(f_1^*(\partial x^{i_0}))(p_0) \in T^1_{p_0}(\mathbb{R}^n)$
 Εύ ορισμός έχουμε τώρα:

$$(f_1^*(\partial x^{i_0}))(p_0) = \left((f_{*}^{p_0})_1^* \right) (\partial x^{i_0}(f(p_0))) \quad (1)$$

Ο 1-ανυσματός $(f_1^*(\partial x^{i_0}))(p_0)$ έχει μέτρο
 ορισμός το $\mathbb{R}^n$. Σημειώνουμε ένα $u_{p_0} \in \mathbb{R}^n$
 και θα υπολογίσουμε το: $\left((f_1^*(\partial x^{i_0}))(p_0) \right)(u_{p_0})$.

Από την (1) έχουμε:

$$\left((f_1^*(\partial x^{i_0}))(p_0) \right)(u_{p_0}) = \left(\left((f_{*}^{p_0})_1^* \right) (\partial x^{i_0}(f(p_0))) \right)(u_{p_0}) \quad (2)$$

Από τον ορισμό της σωδρικής $(f_{*}^{p_0})_1^*$ (βλ/δα 32)

έχουμε:

$$\begin{aligned} \left(\left((f_{*}^{p_0})_1^* \right) (\partial x^{i_0}(f(p_0))) \right)(u_{p_0}) &= \\ &= (\partial x^{i_0}(f(p_0))) (f_{*}^{p_0}(u_{p_0})) \quad (3) \end{aligned}$$

Από τον ορισμό της σωδρικής $f_{*}^{p_0}$ έχουμε:

$$f_{*}^{p_0}(u_{p_0}) = (Df(p_0)(u))_{f(p_0)} \quad (4)$$

(50)

Αντικαθιστώντας από την (4) στην (3) έχουμε:

$$\left(\begin{pmatrix} f(p_0) \\ * \end{pmatrix}^* \right) \left(\partial x^{i_0}(f(p_0)) \right) (u_{p_0}) =$$

$$= \left(\partial x^{i_0}(f(p_0)) \right) \left(Df(p_0)(u) \right)_{f(p_0)} \quad (5)$$

Από τον ορισμό του διαφορίσιμου ∂x^{i_0} έχουμε:

$$\left(\partial x^{i_0}(f(p_0)) \right) \left(Df(p_0)(u) \right)_{f(p_0)} =$$

$$= \left(D x^{i_0}(f(p_0)) \right) \left(Df(p_0)(u) \right) \quad (6)$$

Επειδή ισχύει $D x^{i_0}(f(p_0)) = x^{i_0} \quad (7)$ αντικαθιστώντας από την (7) στην (6) έχουμε:

$$\left(\partial x^{i_0}(f(p_0)) \right) \left(Df(p_0)(u) \right)_{f(p_0)} = x^{i_0} \left(Df(p_0)(u) \right) \quad (8)$$

Είναι γνωστό τώρα ότι ισχύει:

$$Df(p_0)(u) = \left(Df_1(p_0)(u), Df_2(p_0)(u), \dots, Df_m(p_0)(u) \right) \quad (9)$$

Από την (9) παίρνουμε:

$$x^{i_0} \left(Df(p_0)(u) \right) = Df_{i_0}(p_0)(u) \quad (\text{από τον ορισμό}$$

$$\text{της } x^{i_0} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}). \quad (10)$$

(51)

Είναι γνωστό ότι για $\mathbb{R}^n$

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ τότε ισχύει:
 $\nwarrow$ Εσωτερικό γινόμενο

$$Df_{i_0}(p_0)(u) = \nabla f_{i_0}(p_0) \cdot u =$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_j}(p_0) u_j \quad (11).$$

Από τις (2), (5), (8), (10) και (11) παίρνουμε:

$$\left((f_1^* (dx^{i_0})) (p_0) \right) (u_{p_0}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_j}(p_0) u_j \quad (12)$$

Από τον ορισμό μας που έχουμε κάνει στην σελίδα 21 έχουμε ότι για τις διαφορίμελες 2-μορφές

$$dx^j \in \bigwedge^2 (\mathbb{R}^n_p) \text{ ισχύει ότι:}$$

$$(dx^j(p_0))(u_{p_0}) = u_j \text{ για κάθε } j=1,2,\dots,n \quad (13).$$

Αντικαθιστώντας από τις (13) στην (12) παίρνουμε:

$$\left((f_1^* (dx^{i_0})) (p_0) \right) (u_{p_0}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_j}(p_0) \left((dx^j(p_0))(u_{p_0}) \right) \quad (14).$$

(52)

אנו רוצים שיהיה לנו הקדשה של n קבועים ואלו
 הם הפרמטרים של הפונקציה f ב-2-משתנים
 $\partial x^j(p_0)$ וכן $j=1,2,\dots,n$ האפשריים:

$$\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_j}(p_0) (\partial x^j(p_0)) \right) (u_{p_0}) =$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_j}(p_0) \cdot ((\partial x^j(p_0))(u_{p_0})) \quad (15).$$

אנחנו נשתמש ב-15 ו-14 כדי להוכיח:

$$\left(\left(f_1^* (\partial x^{i_0}) \right) (p_0) \right) (u_{p_0}) = \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_j} \right) (p_0) (\partial x^j(p_0)) \right) (u_{p_0}) \quad (16)$$

אבל מ-16 נובע כי לכל $u_{p_0} \in T_{p_0}$
 $\left(f_1^* (\partial x^{i_0}) \right) (p_0) (u_{p_0}) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_j} \right) (p_0) (\partial x^j(p_0)) (u_{p_0})$ וזה נובע מ-17.

$$\left(f_1^* (\partial x^{i_0}) \right) (p_0) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_j} \right) (p_0) (\partial x^j(p_0)) \quad (17)$$

(53)

Από τον ορισμό των πράξεων των ηρώσεων
 διαφορικών μορφών και του νότου Λαβιεσφον/δωφρπας
 ει διαφορικών μορφών έχουμε :

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_j} \right) (p_0) \cdot (\partial x^j) (p_0) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_j} \cdot \partial x^j \right) (p_0) \quad (28)$$

Αντικαθιστώντας τον από την (28) στην (27) έχουμε:

$$(f_1^* (\partial x^{i_0})) (p_0) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_j} \cdot \partial x^j \right) (p_0) \quad (29)$$

Αφού η (29) ισχύει για το τυχόν σταθεροποιημένο $p_0 \in \mathbb{R}^n$
 έπεται ότι θα ισχύει και για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$. Αυτό δίνει ότι:

$$f_1^* (\partial x^{i_0}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i_0}}{\partial x_j} \cdot \partial x^j \quad \text{και}$$

το προκύψον ισχύει δη το τυχόν σταθεροποιημένο $i_0 \in T_m$
 Άρα τελικά ισχύει το υποθέτωμα για κάθε $i \in T_m$ ■

Πρόταση 2.10

Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ να είναι μια διαφορίσιμη
 συνάρτηση για $n, m \in \mathbb{N}$. Έστω $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ να
 είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε ισχύει:

$$f_u^*(g \cdot \omega) = (g \circ f) \cdot f_u^*(\omega) \quad \text{για κάθε}$$

$$u\text{-διαφορίσιμ μορφή } \omega \in \prod_{p \in \mathbb{R}^m} \Omega^u(\mathbb{R}_p^m).$$

Απόδειξη (μετά από αυτό)

$$\text{Έστω } p_0 \in \mathbb{R}^n. \text{ Η } g \omega \in \prod_{p \in \mathbb{R}^m} \Omega^u(\mathbb{R}_p^m) \text{ και}$$

$$\text{η } f_u^* \text{ έχει πεδίο ορισμού το } \prod_{p \in \mathbb{R}^m} \Omega^u(\mathbb{R}_p^m) \text{ και}$$

άρα ορίζεται η διαφορίσιμη u -μορφή $f_u^*(g \omega)$ η
 οποία ανήκει στο $\prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^u(\mathbb{R}_p^n)$.

Σταθεροποιούμε ένα $p_0 \in \mathbb{R}^n$.

Ε' ορισμού έχουμε:

$$(f_u^*(g \omega))(p_0) = (f_{*}^{p_0})^*((g \omega)(f(p_0))) \quad (1)$$

§§

Από τον ορισμό του γινόμενου σωδρπύου ει διαφορική μορφής έχουμε:

$$(g \omega)(f(p_0)) = g(f(p_0)) \cdot \omega(f(p_0)) \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας από την (2) στην (1) έχουμε:

$$(f_*^* (g \omega))(p_0) = (f_*^{p_0})^* (g(f(p_0)) \cdot \omega(f(p_0))) \quad (3)$$

Επειδή ο σωδρπύος $(f_*^{p_0})^*$ είναι γραμμικός έχουμε:

$$(f_*^{p_0})^* (g(f(p_0)) \cdot \omega(f(p_0))) =$$

$$= g(f(p_0)) \cdot (f_*^{p_0})^* (\omega(f(p_0))) \quad (4)$$

Από τον ορισμό της f_*^* έχουμε:

$$(f_*^* \omega)(p_0) = (f_*^{p_0})^* (\omega(f(p_0))) \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας από την (4) και (5) στην (3) έχουμε:

$$(f_*^* (g \omega))(p_0) = g(f(p_0)) \cdot (f_*^* \omega)(p_0) \quad \text{ορισμός της } g \circ f$$

$$= (g \circ f)(p_0) \cdot (f_*^* \omega)(p_0) \quad (6)$$

Από τον ορισμό του γινόμενου σωδρπύου ει διαφορική μορφής πάλι έχουμε:

$$(g \circ f)(p_0) \cdot (f_*^* \omega)(p_0) = ((g \circ f) \circ f_*^* \omega)(p_0) \quad (7)$$

(56)

Αντικαθιστώντας από την (7) στην (6) έχουμε:

$$(f_u^*(g\omega))(p_0) = ((g \circ f) \cdot f_u^*(\omega))(p_0) \quad (p)$$

Από το p έχουμε ότι το p_0 είναι στοιχείο του P_0 .
 $p_0 \in P_0$, θα έχουμε και για κάθε $p \in P_0$.

Αρα για κάθε $p \in P_0$ έχουμε:

$$(f_u^*(g\omega))(p) = ((g \circ f) \cdot f_u^*(\omega))(p) \quad \text{για κάθε } p \in P_0$$

Η (9) μας δείχνει ότι:

$$f_u^*(g\omega) = (g \circ f) \cdot f_u^*(\omega) \quad \text{και το ζητούμενο
 επιδείχθηκε.} \quad \blacksquare$$

Για την επόμενη πρόταση θα μας χρειαζούν 2 λήμματα,
 τα οποία είναι εύκολοι. Εύκολοι είναι

Λήμμα 2.11 $\leftarrow$

Έστω V, W να είναι δύο διανυσματικοί χώροι και

$f: V \rightarrow W$ να είναι μια γραμμική απεικόνιση

Έστω $S \in \mathcal{T}^4(W)$ και $T \in \mathcal{T}^4(W)$ για

$u, l \in \mathbb{N}$. Από την πρόταση 32 η f_u^* ορίζεται στο

$\mathcal{T}^4(W)$ και άρα ορίζεται ο u -ταυσμός

$f_u^*(S) \in \mathcal{T}^4(V)$. Η f_l^* ορίζεται στο

(57)

$\mathcal{T}^l(w)$ και άρα $f_l^*(T) \in \mathcal{T}^l(V)$.

Άρα ορίζεται το τανυστικό γινόμενο

$$f_u^*(S) \otimes f_l^*(T) \in \mathcal{T}^{u+l}(V)/I$$

Αφού $S \in \mathcal{T}^u(w)$ και $T \in \mathcal{T}^l(w)$ έπεται

οτι το τανυστικό γινόμενο $S \otimes T \in \mathcal{T}^{u+l}(w)$.

Άρα από τον ορισμό του f_{u+l}^* έπεται οτι αυτό έχει καθορισμό του $\mathcal{T}^{u+l}(w)$ και άρα ορίζεται

$$\text{το } f_{u+l}^*(S \otimes T) \in \mathcal{T}^{u+l}(V)/I$$

Έτσι οι $u+l$ τανυστές $f_u^*(S) \otimes f_l^*(T)$

και $f_{u+l}^*(S \otimes T)$ ανήκουν στο ίδιο σύνολο

το $\mathcal{T}^{u+l}(V)$.

Θα δείξουμε τώρα οτι ισχύει:

$$f_{u+l}^*(S \otimes T) = f_u^*(S) \otimes f_l^*(T)$$

Απόδειξη

Έστω $u_1, u_2, \dots, u_u, u_{u+1}, \dots, u_{u+l} \in V$.

Υπολογίζουμε τώρα:

(58)

$$(f_{u+l}^* (S \otimes T))((u_1, u_2, \dots, u_{u+l})) \xrightarrow{\text{ορισμός της } f_{u+l}^*}$$

$$= (S \otimes T)(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_u), f(u_{u+1}), \dots, f(u_{u+l})) =$$

$$\xrightarrow{\text{ορισμός της } S \otimes T} S((f(u_1), \dots, f(u_u))) \cdot T((f(u_{u+1}), \dots, f(u_{u+l})))$$

$$= (f_u^*(S))((u_1, u_2, \dots, u_u)) \cdot (f_l^*(T))((u_{u+1}, \dots, u_{u+l}))$$

↑
ορισμός των f_u^* και f_l^*
ορισμός της $f_u^*(S) \otimes f_l^*(T)$

$$= (f_u^*(S) \otimes f_l^*(T))((u_1, u_2, \dots, u_{u+l})) \quad (1)$$

Επειδή η (1) ισχύει για καθένα $(u_1, u_2, \dots, u_{u+l}) \in V^{u+l}$

έπεται το ζητούμενο. ■

Πρόταση 2.12

Έστω V, W να είναι δυο τοχάισι διανυσματικοί

χώροι και $f: V \rightarrow W$ να είναι μια γραμμική απεικόνιση.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$f_u^*: \mathcal{I}^n(W) \rightarrow \mathcal{I}^n(V) \text{ και τις απεικονίσεις}$$

$$Alt: \mathcal{I}^n(W) \rightarrow \mathcal{I}^n(W) \text{ (όχι/δεν ή πρώτων βαθμίων απεικονίσεων)}$$

(59)

Η συνάρτηση Alt εξαρτάται από τον χώρο V και το κελύ. Από είναι πλήρως συσχετισμένη δεδομένα και V μόνο. Έτσι, δηλώνουμε την συνάρτηση αυτή συμβολίζοντας με: $Alt_{u,v} : T^u(V) \rightarrow \Omega^u(V)$

για αριθμούς, ομογενοποιείται και u
 $Alt_{u,w} : T^u(W) \rightarrow \Omega^u(W)$.

Με τους συμβολισμούς αυτούς ορίζονται, μεταξύ
οι συναρτήσεις:

$$Alt_{u,v} \circ f_u^* : T^u(W) \rightarrow \Omega^u(V) \text{ και}$$

$$f_u^* \circ Alt_{u,w} : T^u(W) \rightarrow \Omega^u(V) \text{ όπου}$$

χρησιμοποιήσαμε και το Lemma 2.7 στην σελίδα 38 αυτού του συγγραφέα.

Με τους παραπάνω συμβολισμούς ισχύει ότι:

$$Alt_{u,v} \circ f_u^* = f_u^* \circ Alt_{u,w}.$$

Απόδειξη

(60)

Έστω $T \in \mathcal{T}^4(W)$ Έχουμε ότι: $(f_u^* \circ \text{Alt}_{u,w})(T) \in \mathcal{Z}^4(V)$.Ορίζουμε υπόλοιπα $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$. Έχουμε:

$$\left((f_u^* \circ \text{Alt}_{u,w})(T) \right) \left((u_1, u_2, \dots, u_n) \right) \stackrel{\text{ορίσμος της } f_u^* \circ \text{Alt}_{u,w}}{=} \quad$$

$$= \left(f_u^* \left(\text{Alt}_{u,w}(T) \right) \right) \left((u_1, u_2, \dots, u_n) \right) =$$

$$\stackrel{\text{ορίσμος της } f_u^*}{=} \left(\text{Alt}_{u,w}(T) \right) \left((f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) \right) \quad (1)$$

$$\text{Ορίζουμε} \quad w_i = f(u_i) \text{ για } i=1, 2, \dots, n \text{ και}$$

προφανώς $w_i \in W$ για κάθε $i=1, 2, \dots, n$.

Αρα έχουμε:

$$\left(\text{Alt}_{u,w}(T) \right) \left((f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) \right) =$$

$$= \left(\text{Alt}_{u,w}(T) \right) \left((w_1, w_2, \dots, w_n) \right) \quad (2)$$

Από τον ορίσμο της συνάρτησης $\text{Alt}_{u,w}$ έχουμε:

$$\left(\text{Alt}_{u,w}(T) \right) \left((w_1, w_2, \dots, w_n) \right) =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sgn } \sigma \cdot T(w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(n)}) \quad (3)$$

Αφού $w_i = f(u_i)$ για κάθε $i=1, 2, \dots, n$ αντικαθιστούμεαπό αυτό ότι: $w_{\sigma(i)} = f(u_{\sigma(i)})$ για κάθε $i=1, 2, \dots, n$

61
 Αντιπαθιστικὸς καὶ τὸ (4) ἔχει (3) ἐξουσίαν

$$(Alt_{u,w}(T))((w_1, w_2, \dots, w_n)) =$$

A_{no} τον ορισμό της f_u^+ έχουμε:

$$(f_u^*(T))((u_6(1), u_6(2), \dots, u_6(n))) =$$

[illegible]

אנטרופיה (5) וטור (6) נחזקו ונחזקו

$$(Alt_{u,w}(T))((w_1, w_2, \dots, w_4)) =$$

$$= \frac{1}{u!} \sum_{\sigma \in S_u} \text{sgn } \sigma \cdot (f_u^*(\tau))((u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(u)}))$$

$$= \left(\text{Alt}_{u,v} \left(f_u^*(T) \right) \right) ((u_1, u_2, \dots, u_u)) \quad (7).$$

Ans 715 (1), (2) and (7) not possible.

$$((f_u^* \circ \text{Alt}_{u,v})(\tau))((y_1, y_2, \dots, y_n)) =$$

$$= ((\text{Alt}_{U,V} \circ f_U^*)(T))((u_1, u_2, \dots, u_n)) / p).$$

(62)

Επειδή η (*) ισχύει για κάθε $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in V^n$,

έπεται ότι:

$$(f_u^* \circ \text{Alt}_{u,w})(\tau) = (\text{Alt}_{u,v} \circ f_u^*)(\tau) \quad (*).$$

Τέλος αφού η (*) ισχύει για κάθε $\tau \in T^k(W)$, έπεται

ότι:

$$f_u^* \circ \text{Alt}_{u,w} = \text{Alt}_{u,v} \circ f_u^*, \text{ και η απόδειξη του}$$

λήμματος ολοκληρώθηκε ■

Με βάση τα λήμματα 2.11 και 2.12 είπαμε, έτοιμοι τώρα να δείξουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.13 ← Εντός αυτής η επιφώνηση λέει

Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ να είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση για $n, m \in \mathbb{N}$.

Έστω $k, l \in \mathbb{N}$ και οι διαφορικές μορφές

$$\omega \in \bigwedge^k (\mathbb{R}^m) \text{ και } \eta \in \bigwedge^l (\mathbb{R}^m).$$

Τότε ε' ορίζεται $\omega \wedge \eta \in \bigwedge^{k+l} (\mathbb{R}^m).$

(63)

Από τον ορισμό της f_{u+l}^* έχουμε ότι
αυτή έχει πεδίο ορισμού το $\prod_{p \in \mathbb{P}_h^m} \mathbb{Z}^{u+l}(\mathbb{P}_h^m)$ και

έχει οριστεί η $f_{u+l}^*(\omega, \eta) \in \prod_{p \in \mathbb{P}_h^n} \mathbb{Z}^{u+l}(\mathbb{P}_h^n)$.

Απόφα αφού $\omega \in \prod_{p \in \mathbb{P}_h^m} \mathbb{Z}^u(\mathbb{P}_h^m)$ και η f_u^* έχει

πεδίο ορισμού το $\prod_{p \in \mathbb{P}_h^m} \mathbb{Z}^u(\mathbb{P}_h^m)$ ορίζεται η

η-διαφορίτης μορφή $f_u^*(\omega) \in \prod_{p \in \mathbb{P}_h^n} \mathbb{Z}^u(\mathbb{P}_h^n)$.

Παράμοια αφού $\eta \in \prod_{p \in \mathbb{P}_h^m} \mathbb{Z}^l(\mathbb{P}_h^m)$ και η f_l^*

ορίζεται στο $\prod_{p \in \mathbb{P}_h^m} \mathbb{Z}^l(\mathbb{P}_h^m)$, έπεται ότι ορίζεται

η ψ -διαφορίτης μορφή $f_l^*(\eta) \in \prod_{p \in \mathbb{P}_h^n} \mathbb{Z}^l(\mathbb{P}_h^n)$

Αφού τώρα $f_u^*(\omega) \in \prod_{p \in \mathbb{P}_h^n} \mathbb{Z}^u(\mathbb{P}_h^n)$ και $f_l^*(\eta) \in \prod_{p \in \mathbb{P}_h^n} \mathbb{Z}^l(\mathbb{P}_h^n)$

(64)

έπεται ότι:

$$f_u^*(\omega) \wedge f_v^*(\eta) \in \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^{u+v}(\mathbb{R}^n_p) \text{ από τον}$$

ορισμό του εξωτερικού γινομένου διαφοριακών μορφών.

Επίσης δείξαμε ότι οι $u+v$ διαφοριακές μορφές

$$f_{u+v}^*(\omega \wedge \eta) \text{ και } f_u^*(\omega) \wedge f_v^*(\eta) \text{ ανήκουν στο}$$

$$\text{ίδιο σύνολο } \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^{u+v}(\mathbb{R}^n_p).$$

Παράγει τώρα ότι:

$$f_{u+v}^*(\omega \wedge \eta) = f_u^*(\omega) \wedge f_v^*(\eta).$$

Απόδειξη (απλά ούτως)

Εξαθρονοποιούμε ένα $p_0 \in \mathbb{R}^n$.

Υποθετίζουμε τώρα:

$$(f_{u+v}^*(\omega \wedge \eta))(p_0) \stackrel{\text{ορισμός της } f_{u+v}^*}{=}$$

$$= (f_{u+v}^{p_0})^* ((\omega \wedge \eta)(f(p_0))) \stackrel{\text{ορισμός εξ. γιν. διαφ. μορφών}}{=}$$

$$= (f_{u+v}^{p_0})^* (\omega(f(p_0)) \wedge \eta(f(p_0))) =$$

↑
ορισμός εξ. γιν. γινομένου
ταυτολογία

(65)

$$\begin{aligned}
 &= (f_{*}^{p_0})_{u+l}^* \left(\frac{(u+l)!}{u! \cdot l!} \operatorname{Alt}_{u+l, |p_{f(p_0)}|}^n (w(f(p_0)) \otimes u(f(p_0))) \right) = \\
 &= \frac{(u+l)!}{u! \cdot l!} (f_{*}^{p_0})_{u+l}^* \left(\operatorname{Alt}_{u+l, |p_{f(p_0)}|}^n (w(f(p_0)) \otimes u(f(p_0))) \right) \\
 &= \frac{(u+l)!}{u! \cdot l!} \left((f_{*}^{p_0})_{u+l}^* \operatorname{Alt}_{u+l, |p_{f(p_0)}|}^n (w(f(p_0)) \otimes u(f(p_0))) \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{(u+l)!}{u! \cdot l!} \cdot \left(\operatorname{Alt}_{u+l, |p_{p_0}|}^n \circ (f_{*}^{p_0})_{u+l}^* \right) (w(f(p_0)) \otimes u(f(p_0)))$$

$$= \frac{(u+l)!}{u! \cdot l!} \cdot \left(\operatorname{Alt}_{u+l, |p_{p_0}|}^n \left((f_{*}^{p_0})_{u+l}^* (w(f(p_0)) \otimes u(f(p_0))) \right) \right)$$

$$= \frac{(u+l)!}{u! \cdot l!} \operatorname{Alt}_{u+l, |p_{p_0}|}^n \left((f_{*}^{p_0})_{u+l}^* (w(f(p_0)) \otimes u(f(p_0))) \right)$$

$$= \frac{(u+l)!}{u! \cdot l!} \operatorname{Alt}_{u+l, |p_{p_0}|}^n \left((f_u^* (w)) (p_0) \otimes (f_l^* (u)) (p_0) \right) =$$

ορισμός του εναρμονισμένου γινόμενου

(66)

ορίσμος ε3. συνοψένου
 $\hookrightarrow$ διαφορικών μορφών

$$= (f_u^*(\omega))(\rho_0) \wedge (f_\ell^*(\eta))(\rho_0)$$

$$= (f_u^*(\omega) \wedge f_\ell^*(\eta))(\rho_0) \quad (1).$$

Αφού η (1) ισχύει για το τυχόν σταθεροποιημένο $\rho_0 \in \mathbb{R}^n$,
 έπεται ότι ισχύει για κάθε $\rho \in \mathbb{R}^n$. Άρα έχουμε:

$$f_{u \wedge \ell}^*(\omega \wedge \eta) = f_u^*(\omega) \wedge f_\ell^*(\eta), \text{ δηλαδή το ζητούμενο}$$

Με βάση τις προηγουμένως προτάσεις
 2.8, 2.9, 2.10, 2.13 μπορούμε να υπολογίσουμε
 την διαφορική μορφή $f_u^*(\omega)$ από την διαφορική
 μορφή ω και την συνάρτηση f .

Θα δούμε αργότερα με εφαρμογή πως γίνεται αυτό.

Σε μια ωκευρισμένη, αλλά σπουδαία περίπτωση όμως
 μπορεί να να γίνει ένας άμεσος υπολογισμός.

Αυτό γίνεται με την επόμενη πρόταση 2.14.

Πρόταση 2.14

Πρόταση 2.14

(67)

Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι
δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις, για $n \in \mathbb{N}$.

Τότε ισχύει:

$$f_n^* (h \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)) = (h \circ f) (\det f') (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)$$

όπου με f' εννοούμε τον πίνακα Jacobi των μερικών
παραγώγων της f .

Απόδειξη (ευτός ύλης)

Θέτουμε $\omega := dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ για απλότητα.

Έτσι αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει:

$$f_n^* (h\omega) = (h \circ f) \cdot (\det f') \cdot \omega$$

Από την πρόταση 2.10 έχουμε ότι:

$$f_n^* (h\omega) = (h \circ f) \cdot f_n^* (\omega) \quad (1)$$

Έτσι από την (1) αρκεί να υπολογίσουμε την $f_n^* (\omega)$.

Σταθεροποιούμε ένα $p_0 \in \mathbb{R}^n$.

Από τον ορισμό της f_n^* παίρνουμε:

$$(f_n^* (\omega)) (p_0) = \left((f_* p_0)^* \right)_n (\omega (f(p_0))) \quad (2)$$

Ο γανυτής $(f_n^* (\omega)) (p_0) \in \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n_{p_0})$

Υπολογίσουμε την τιμή του $(f_n^* (\omega)) (p_0)$ όταν
η-άδα των βάσεων $(e_1)p_0, \dots, (e_n)p_0 \in (\mathbb{R}^n_{p_0})^n$

Ε-76, από την (2) έχουμε:

Էճրա $f_i, i=1,2,\dots,n$ յա ճւառ ϕ ճարտըղթը
ճարտըղթըս ու f , ճոշոթի: ա $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
 $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))$
ուդ $\theta \in \mathbb{R}^n$.
Էճրա $Jf(p_0)$ յա ճւառ ϕ ճարտըղթըս ու f ճոշ p_0 , ճոշոթի:

$$Jf(p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(p_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(p_0) \end{pmatrix}$$

(69)

Τότε ως γνωστό, ισχύει ότι:

$$Df(p_0)(e_j) = \left(Jf(p_0) \cdot e_j^t \right)^t = e_j \cdot \left(Jf(p_0) \right)^t$$

(όπου $\mu \in A^t$ συμβολίζουμε τον αντίστροφο πίνακα ενός πίνακα

A).

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$Df(p_0)(e_j) = \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(p_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(p_0) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^t \right)$$

το 1 στην j-θέση
και παντού αλλού 0.

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(p_0), \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(p_0), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(p_0) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p_0) e_i \quad \text{η αντίστροφη αλυσίδα}$$

και ανάλογα για δείκτες έχουμε ότι:

$$Df(p_0)(e_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p_0) e_j \quad \text{για κάθε } i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

(70)

Από τον ορισμό των ηρώσεων και ηρόθεσης και των
αριθμητικών συλλογιστικών είναι εμφανές ότι ο διανυσματικός
χώρος $\left| \bigoplus_{i=1}^n f(p_0) \right|$ έχουμε ότι: (Χρησιμοποιώντας την 4)

$$\left(Df(p_0)(e_i) \right)_{f(p_0)} = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p_0) e_j \right)_{f(p_0)} =$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p_0) \cdot (e_j)_{f(p_0)} \quad \text{για κάθε}$$

$$i=1, 2, \dots, n \quad (5).$$

Εφαρμόζουμε τώρα την ηρόθεση στην περίπτωση 154 των
ηρώων της ενότητας 9 που $S = \omega(f(p_0))$,

$$w_i = \left(Df(p_0)(e_i) \right)_{f(p_0)} \quad \text{για } i=1, 2, \dots, n,$$

$$a_{ij} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \text{για κάθε } (i, j) \in T_n^2 \quad \text{και } u_j = (e_j)_{f(p_0)}$$

για κάθε $j=1, 2, \dots, n$ και τον χώρο $V = \left| \bigoplus_{i=1}^n f(p_0) \right|$ και

παίρνουμε ότι ισχύει:

$$\left(\omega(f(p_0)) \right) \left(\left(Df(p_0)(e_1) \right)_{f(p_0)}, \dots, \left(Df(p_0)(e_n) \right)_{f(p_0)} \right) =$$

(71)

$$(\det f'_{(p_0)}) \cdot (\omega(f(p_0)))((e_1)_{f(p_0)}, \dots, (e_n)_{f(p_0)}) \quad (6)$$

Εξ6, από 74 (3) και (6) παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} & ((f_n^*(\omega))(p_0))((e_1)_{p_0}, \dots, (e_n)_{p_0}) = \\ & = (\det f'_{(p_0)}) \cdot (\omega(f(p_0)))((e_1)_{f(p_0)}, \dots, (e_n)_{f(p_0)}) \quad (7) \end{aligned}$$

όπου με $\det f' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ συμβολίζουμε την συνάρτηση

με νόμο: $\det f'(p) = \det (J f(p))$ για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$.

Αφού η (7) ισχύει για το τυχόν σταθεροποιημένο $p_0 \in \mathbb{R}^n$, έπεται ότι ισχύει για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$.

Δηλαδή για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} & ((f_n^*(\omega))(p))((e_1)_p, \dots, (e_n)_p) = \\ & = (\det f')(p) \cdot \omega(f(p))((e_1)_{f(p)}, \dots, (e_n)_{f(p)}) \quad (8) \end{aligned}$$

Από τον ορισμό του ελωτερίου του σημείου διαφορίων μορφών έχουμε: για $p \in \mathbb{R}^n$.

$$\omega(f(p)) = (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(f(p)) =$$

$$= dx^1(f(p)) \wedge dx^2(f(p)) \wedge \dots \wedge dx^n(f(p)) \quad (9).$$

Εφαρμόζουμε τώρα το Lemma 2 στην περίπτωση 164 των πρώτων συζητήσεων για $V = \mathbb{R}^n_{f(p)}$ για την διατεταγμένη

βάση $((e_1)_{f(p)}, \dots, (e_n)_{f(p)})$ του $\mathbb{R}^n_{f(p)}$ και στα 74

გულიან გულ გოვ დივან ს

$$(\partial x^1(f(p)) \wedge \partial x^2(f(p)) \wedge \dots \wedge \partial x^n(f(p)))((e_1)_{f(p)}, \dots, (e_n)_{f(p)}) = 1$$
$$\omega(f(p))((e_1)_p, \dots, (e_n)_{f(p)}) = 1 \quad (1) \quad \text{und} \quad q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9$$
$$(f_n^*(\omega)(p))((e_1)_p, \dots, (e_n)_p) = (\det f')(p) \quad (12)$$

164 שנה בלבד 2. חלקה 2
 שנה 164 בלבד 2. חלקה 2
 שנה 164 בלבד 2. חלקה 2

3) $(e_1)_p, \dots, (e_n)_p$
 4) $(\alpha_{x^1}(p), \dots, \alpha_{x^n}(p))$

$(dx^1(\varphi) \wedge dx^2(\varphi))$ και $dx^1(\varphi) \wedge dx^2(\varphi)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα
 Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου διανυσματικού χώρου

$$\begin{aligned} & ((f_n^* \omega)(p))((e_1)_p, \dots, (e_n)_p) = \\ & = (\det f') \cdot \omega(p)((e_1)_p, \dots, (e_n)_p) \quad \text{για οποιο } p \in U. \end{aligned} \quad (14)$$

(73)

Ας σταθεροποιήσουμε ένα $p_0 \in \mathbb{R}^n$.

Εστω $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{R}^n_{p_0}$.

Εστω ότι $w_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} (e_j)_{p_0}$ για κάθε $i=1, 2, \dots, n$.

Για $V = \mathbb{R}^n_{p_0}$ και για τον n -τάλαντο

$(f_n^*(\omega))(p_0) \in \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n_{p_0})$ έχουμε από την πρόταση

στην σελίδα 154 του πρώτου συγγραφέα για

$V = \mathbb{R}^n_{p_0}$, $u_j = (e_j)_{p_0}$ για $j=1, 2, \dots, n$ και

για $S = (f_n^*(\omega))(p_0)$ παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} ((f_n^*(\omega))(p_0))((w_1, w_2, \dots, w_n)) &= \\ &= \det(b_{ij}) \cdot ((f_n^*(\omega))(p_0))((e_1)_{p_0}, \dots, (e_n)_{p_0}) \stackrel{(14)}{=} \\ &= \det(b_{ij}) \cdot \det f'(p_0) \cdot \omega(p) ((e_1)_{p_0}, \dots, (e_n)_{p_0}) \\ &= \det f'(p_0) \cdot (\det(b_{ij}))(\omega(p) ((e_1)_{p_0}, \dots, (e_n)_{p_0})) = \\ &= (\det f'(p_0) \cdot \omega(p_0))((w_1, w_2, \dots, w_n)), \text{ όπου} \end{aligned}$$

για να πάρουμε την τελευταία ισότητα εφαρμόσαμε για

για αυτήν φορά την πρόταση στην σελίδα 154 του

πρώτου συγγραφέα για τον $S = \omega(p_0)$ τώρα.

Επειδή η (15), έχει για κάθε $(w_1, w_2, \dots, w_n) \in (\mathbb{R}^n_{p_0})^n$

έπεται ότι: $(f_n^*(\omega))(p_0) = \det f'(p_0) \cdot \omega(p_0) =$

$= (\det f' \cdot \omega)(p_0)$ (16).

(74)

Επειδή η (16) ισχύει για το τυχαίο βραδερονομήσιμο $p \in \mathbb{R}^n$, θα ισχύει και για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$. Άρα παίρνουμε ότι:

$$f_n^*(\omega) = \det f' \cdot \omega \quad (17).$$

Αντικαθιστώντας στο (17) στην (1) έχουμε:

$$f_n^*(h\omega) = (h \circ f) \cdot (\det f') \cdot \omega \quad \text{δηλαδή το ζητούμενο}$$

Παρατήρηση 2.15

Αυτό που εδώ είναι ουσία η ηραγούμενη πρόταση 2.14 είναι ότι μας παρέχει έναν τρόπο για τον υπολογισμό της διαφορίτης μορφής

$$f_n^*(h \cdot (\alpha x^1 \wedge \dots \wedge \alpha x^n)) \quad \text{για δοσμένες συναρτήσεις}$$

f και h .

Η ίδια πρόταση μας δίνει επίσης έναν τρόπο για να υπολογίσουμε την τιμή $(f_n^*(h \cdot (\alpha x^1 \wedge \dots \wedge \alpha x^n)))(p)(\omega)$ σε τυχαίο δοσμένο $\vec{\omega} \in (\mathbb{R}^n)^n$ για τυχαίο $p \in \mathbb{R}^n$.

Έστω τυχαία n -άδα $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$ και τυχαίο $p \in \mathbb{R}^n$. Έστω ότι: $u_i = \sum_{j=1}^n \theta_{ij} e_j$ για κάθε $i=1, 2, \dots, n$, όπου $\theta_{ij} \in \mathbb{R}$ για κάθε $(i, j) \in T_n$.

(75)

Έστω τυχαίο $p \in \mathbb{R}^n$ και το

$$\vec{w} = ((u_1)_p, (u_2)_p, \dots, (u_n)_p) \in \mathbb{R}^n_p.$$

Τότε από την σχέση 15 στην σελίδα 73 έχουμε ότι:

$$(f_n^*(\omega)(p))(\vec{w}) = \det f'(p) \cdot \det(b_{ij})(1).$$

Από την πρόταση 2.10 έχουμε:

$$f_n^*(h\omega) = (h \circ f) \cdot f_n^*(\omega) \quad \text{για } \omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n / q.$$

Άρα από τις 17 και 27 παίρνουμε:

$$\left((f_n^* (h \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n))) (p) \right) (\vec{w}) =$$

$$= \left(((h \circ f) \cdot f_n^*(\omega)) (p) \right) (\vec{w}) =$$

$$= ((h \circ f)(p) \cdot f_n^*(\omega)(p))(\vec{w}) =$$

$$= (h \circ f)(p) \cdot (f_n^*(\omega)(p))(\vec{w}) =$$

$$= (h \circ f)(p) \cdot \det f'(p) \cdot \det(b_{ij})$$

Αρα τελικά έχουμε ότι: $\downarrow$ ήδη από το 5 ο νόμος εντάς
 $\downarrow$ αλυσ

$$\left(f_n^* (h \cdot (dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n)) (p) \right) (\vec{w}) =$$

$$= (h \circ f)(p) \cdot \det f'(p) \cdot \det(b_{ij}) \text{ και}$$

έτσι έχουμε ένα νόμο για τον υπολογισμό της
διαφορίων μορφής $f_n^* (h(dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n))$ σε
οποιοδήποτε σημείο της.

(76)

Παραβάτετε αυτόν τον τύπο με τον τύπο που έχουμε βρει (και από τον οποίο και προέρχεται) για τον υπολογισμό μιας οποιασδήποτε διαφορίτης n -μορφής στον $\mathbb{R}^n$ σε ένα σημείο της.

Εννοείται βέβαια ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις υπολογισμού της τιμής της $f_n^*(h \cdot (\alpha x^1 \wedge \alpha x^2 \wedge \dots \wedge \alpha x^n))$ σε οποιαδήποτε σημείο της χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες προτάσεις 2.8, 2.9, 2.10 και 2.13 που έχουμε αποδείξει.

Επανερχόμαστε τώρα στον ορισμό του διαφορίτου που ορίσαμε στην σελίδα 20. Έστω $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Το διαφορίτικό της n df είναι μια διαφορίτης 1-μορφής

$$df: \mathbb{R}^n \longrightarrow \bigcup_{p \in \mathbb{R}^n} T'(\mathbb{R}^n_p) \quad \text{για την οποία}$$

ισχύει ότι: n $df(p) \in T'(\mathbb{R}^n_p)$ είναι η εφαπτική

συνάρτηση $df(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται με τον

$$\text{τύπο: } (df(p))(u_p) = (Df(p))(u) \quad \text{για}$$

κάθε $u_p \in \mathbb{R}^n_p$, όπου $Df(p)$ είναι το

(77)

δίνουμε διαφορίως (από τον απειροστικό λογισμό III)
 71) f στο σημείο $p \in \mathbb{R}^n$.

Θέλουμε:

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) := \{ f \in (g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}) \mid \text{"} f \text{ είναι}$$

τάξης C^∞ στο $\mathbb{R}^n$ \}, το σύνολο όλων των

C^∞ συναρτήσεων στο $\mathbb{R}^n$.

Αυτό το σύνολο είναι ως πρώτον διανυσματικός
 χώρος με τις συνήθειες πράξεις της ηρώσεως συναρτήσεων
 και του αριθμητικού πολλαπλασιασμού αριθμού επί
 συνάρτησης.

Επί ορίζεται μία συνάρτηση α συνάρτησης

$$\alpha: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_p) \text{ "}$$

οποία σε κάθε $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ αντιστοιχίζει το
 διαφορίως της $\alpha f \in \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_p)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση α είναι
 γραμμική.

(78)

Πριν από αυτό θα δείξουμε ότι το σύνολο

$\Pi \mathcal{I}'(\mathbb{R}^n)$ είναι διανυσματικός χώρος.

$p \in \mathbb{R}^n$

Θα δείξουμε για γενική απόδειξη. η παρακάτω απόδειξη είναι ίδια

Συγκεκριμένα: Έστω $n, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq \infty$.

Θεωρούμε το σύνολο των διαφορίων μορφών

$\Pi \mathcal{I}^u(\mathbb{R}^n)$ όπως ορίζεται στην βελίδα 8, το

$p \in A$

οποίο ορίζεται με παρόμοιο τρόπο όπως έχουμε ορίσει το

σύνολο $\Pi \mathcal{I}^u(\mathbb{R}^n)$, όπου $A \neq \emptyset, A \subseteq \mathbb{R}^n$.

$p \in \mathbb{R}^n$

Αν $\omega_1, \omega_2 \in \Pi \mathcal{I}^u(\mathbb{R}^n)$ ορίζουμε την

$p \in A$

συνάρτηση $\omega_1 + \omega_2 : A \rightarrow \bigcup_{p \in A} \mathcal{I}^u(\mathbb{R}^n)$ με τρόπο:

$(\omega_1 + \omega_2)(p) = \omega_1(p) + \omega_2(p)$ για κάθε $p \in A$. Μπορούμε

να δείξουμε ότι ορίζεται σωστά για διαφορίων

μορφών που την συμπεριλάβουμε με $\omega_1 + \omega_2$ με

$\omega_1 + \omega_2 \in \Pi \mathcal{I}^u(\mathbb{R}^n)$ ώστε $(\omega_1 + \omega_2)(p) = \omega_1(p) + \omega_2(p)$
για κάθε $p \in A$.

(79)

↓ θέλει υπολογισμούς

Επίσης ορίζεται η πράξη:

$$+ : \prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p) \times \prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p) \rightarrow \prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p)$$

όπου :

$$+((\omega_1, \omega_2)) = \omega_1 + \omega_2 \text{ για κάθε } \omega_1, \omega_2$$

$$(\omega_1, \omega_2) \in \left(\prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p) \right)^2$$

↓ θέλει υπολογισμούς

Παρόμοια ορίζεται ο αριθμητικός πολλαπλασιασμός

$$\cdot : \mathbb{R} \times \prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p) \rightarrow \prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p) \text{ με}$$

$$\cdot((\lambda, \omega)) = \lambda \cdot \omega \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \omega \in \prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p)$$

$$\text{όπου } \lambda \cdot \omega \in \prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p) \text{ και}$$

$$(\lambda \omega)(p) = \lambda \cdot \omega(p) \text{ για κάθε } p \in A$$

(Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδική διαφορική κ-ψευδής στο A με την παραπάνω ιδιότητα).

(80)

Θα δείξουμε τώρα την ελπίη η πρόταση

Πρόταση 2.16

Η δομή $\left(\prod_{p \in A} \Sigma^4(\mathbb{R}^n_p), +, \cdot \right)$ με τις πράξεις

που ορίστηκαν παραπάνω είναι διανυσματικός χώρος.

Απόδειξη (Ευτός ύλης)

1) Έστω $\omega_1, \omega_2 \in \prod_{p \in A} \Sigma^4(\mathbb{R}^n_p)$.

Έστω $p \in A$. Έχουμε:

$$(\omega_1 + \omega_2)(p) = \omega_1(p) + \omega_2(p) = \omega_2(p) + \omega_1(p) = (\omega_2 + \omega_1)(p)$$

για κάθε $p \in A$. Άρα $\omega_1 + \omega_2 = \omega_2 + \omega_1$

Άρα ισχύει η αντιμεταθετικότητα ως προς την

πρόσθεση.

2) Έστω $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \prod_{p \in A} \Sigma^4(\mathbb{R}^n_p)$. Έχουμε: για $p \in A$

$$((\omega_1 + \omega_2) + \omega_3)(p) = (\omega_1 + \omega_2)(p) + \omega_3(p) =$$

$$= (\omega_1(p) + \omega_2(p)) + \omega_3(p) = \omega_1(p) + (\omega_2(p) + \omega_3(p))$$

$$= \omega_1(p) + (\omega_2 + \omega_3)(p) = (\omega_1 + (\omega_2 + \omega_3))(p) \text{ για}$$

κάθε $p \in A$. Άρα $(\omega_1 + \omega_2) + \omega_3 = \omega_1 + (\omega_2 + \omega_3)$

Άρα ισχύει η προεταποσυστασιαστικότητα ως προς την

πρόσθεση

(81)

3) Είναι εύκολο να δείξουμε ότι υπάρχει μία μοναδική διαφορική μορφή που την συμβολίζουμε με $\Theta \in \prod_{p \in A} \mathcal{Z}^4(\mathbb{R}^n_p)$ για την οποία ισχύει ότι:

$\Theta(p) = 0_p$ για κάθε $p \in A$ όπου 0_p συμβολίζουμε το φανδενικό n -παιδί $0_p \in \mathcal{Z}^4(\mathbb{R}^n_p)$ με $0_p : (\mathbb{R}^n_p)^4 \rightarrow \mathbb{R}$ με $0_p(\vec{u}) = 0$ για κάθε $\vec{u} \in (\mathbb{R}^n_p)^4$. Έστω $\omega \in \prod_{p \in A} \mathcal{Z}^4(\mathbb{R}^n_p)$. Έστω $p \in A$, έχουμε

$(\omega + \Theta)(p) = \omega(p) + \Theta(p) = \omega(p) + 0_p = \omega(p)$ για κάθε $p \in A$. Άρα $\omega + \Theta = \omega$. Παρόμοια $\Theta + \omega = \omega$.

Άρα το Θ είναι ουδέτερο ως προς την πρόσθεση.

ii) Έστω $\omega \in \prod_{p \in A} \mathcal{Z}^4(\mathbb{R}^n_p)$. Είναι εύκολο να

δείξουμε (θέλει κάποιος απόδειξη βέβαια) ότι υπάρχει μία μοναδική διαφορική μορφή που την συμβολίζουμε με $-\omega \in \prod_{p \in A} \mathcal{Z}^4(\mathbb{R}^n_p)$ για την οποία ισχύει

(82)

$$(-\omega)(p) = -\omega(p) \text{ για κάθε } p \in A.$$

Έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned} (\omega + (-\omega))(p) &= \omega(p) + (-\omega)(p) = \omega(p) - \omega(p) \\ &= 0_p = 0(p) \text{ για κάθε } p \in A. \text{ Άρα} \end{aligned}$$

$$\omega + (-\omega) = 0. \text{ Παρόμοια έχουμε: } (-\omega) + \omega = 0.$$

Άρα, αν $\omega \in \prod_{p \in A} \mathbb{R}^n / (0_p^n)$ έχει αντίθετο στοιχείο $- \omega$.

70 $- \omega$.

Άρα, από τις παραπάνω ιδιότητες 1), 2), 3) και 4)

έπεται ότι η δομή $\left(\prod_{p \in A} \mathbb{R}^n / (0_p^n), + \right)$ είναι

αβελιανή ομάδα.

5) Έστω $\omega, \eta \in \prod_{p \in A} \mathbb{R}^n / (0_p^n)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

Έστω $p \in A$.

$$\begin{aligned} (\lambda(\omega + \eta))(p) &= \lambda((\omega + \eta)(p)) = \lambda(\omega(p) + \eta(p)) = \\ &= \lambda(\omega(p)) + \lambda(\eta(p)) = (\lambda\omega)(p) + (\lambda\eta)(p) = \\ &= (\lambda\omega + \lambda\eta)(p) \text{ για κάθε } p \in A. \text{ Άρα} \end{aligned}$$

$$\lambda(\omega + \eta) = \lambda\omega + \lambda\eta \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } \omega, \eta \in \prod_{p \in A} \mathbb{R}^n / (0_p^n).$$

6) Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\omega \in \prod_{p \in A} \mathcal{L}^u(\mathbb{R}^n_p)$ (83)

Έστω $p \in A$. Έχουμε:

$$(\lambda + \mu) \cdot \omega(p) = (\lambda + \mu) \cdot (\omega(p)) = \lambda \cdot (\omega(p)) + \mu \cdot (\omega(p))$$

$$= (\lambda \cdot \omega)(p) + (\mu \cdot \omega)(p) = (\lambda \omega + \mu \omega)(p) \text{ για κάθε } p \in A.$$

Άρα: $(\lambda + \mu) \omega = \lambda \omega + \mu \omega$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\omega \in \prod_{p \in A} \mathcal{L}^u(\mathbb{R}^n_p)$.

7) Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\omega \in \prod_{p \in A} \mathcal{L}^u(\mathbb{R}^n_p)$.

Έστω $p \in A$. Έχουμε:

$$(\lambda (\mu \omega))(p) = \lambda \cdot ((\mu \omega)(p)) = \lambda \cdot (\mu \cdot (\omega(p))) =$$

$$= (\lambda \mu) \cdot (\omega(p)) = ((\lambda \mu) \cdot \omega)(p) \text{ για κάθε } p \in A. \text{ Άρα}$$

$\lambda \cdot (\mu \omega) = (\lambda \mu) \omega$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\omega \in \prod_{p \in A} \mathcal{L}^u(\mathbb{R}^n_p)$.

8) Έστω $\omega \in \prod_{p \in A} \mathcal{L}^u(\mathbb{R}^n_p)$.

Έστω $p \in A$. Έχουμε:

$$(1 \cdot \omega)(p) = 1 \cdot \omega(p) = \omega(p) \text{ για κάθε } p \in A. \text{ Άρα}$$

$1 \cdot \omega = \omega$ για κάθε $\omega \in \prod_{p \in A} \mathcal{L}^u(\mathbb{R}^n_p)$.

Το αποτέλεσμα εδείχθη χωρίς από τα παραπάνω

(84)

Παρόμοια με την έννοια του διαφορίσιμου που ορίσαμε στην
 σελίδα 10 ορίζεται διαφορίσιμος σε ένα ανοικτό
 υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Συμμεριψμένα:

Έστω $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και έστω

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι μία C^∞ συνάρτηση στο A .

Έστω $p_0 \in A$ σταθεροποιημένο.

Ορίζουμε (*) την συνάρτηση

$$df(p_0): \mathbb{R}_{p_0}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο:}$$

$$(df(p_0))(u_{p_0}) = (Df(p_0))(u) \text{ για κάθε}$$

$u \in \mathbb{R}^n$. Προφανώς $df(p_0)$ ορίζεται καλά και

όπως στην σελίδα 11 $df(p_0)$ είναι πραγματική.

Αποδεικνύεται παρόμοια με την πρόταση 2.2 ότι
 υπάρχει μία μοναδική διαφορίσιμη 1-μορφή

$$\omega \in \prod_{p \in A} T'(\mathbb{R}_p^n) \text{ ώστε:}$$

$$\omega(p) = df(p) \text{ για κάθε } p \in A.$$

(*) Θέλει κάποιος να αποδείξει ότι πράγματι ορίζεται μία
 τέτοια συνάρτηση

Αυτή των μοναδικών διαφορίων 2-μορφών των
συμβολίζουμε με αf .

Συμβολίζουμε τώρα με

$$C^\infty(A) := \{ f \in (g: A \rightarrow \mathbb{R}) \mid \eta \text{ } f \text{ είναι } C^\infty \text{ συναρτησής} \}$$

το βέβαια είναι των C^∞ διαφορίων συναρτήσεων με
πεδίο ορισμού το A και τιμές στο $\mathbb{R}$.

Προφανώς η δομή $(C^\infty(A), +, \cdot)$ είναι

διανυσματικός χώρος με τις συνήθεις πράξεις της

πράξεως συναρτήσεων και του αριθμητικού πολλαπλασιασμού
αριθμού επί συναρτησής.

Επίσης από τα παραπάνω ορίζεται καλώς η συναρτησής

$$\alpha : C^\infty(A) \longrightarrow \prod_{p \in A} T'(\mathbb{R}_p^n)$$

η οποία σε καθε $f \in C^\infty(A)$ αντιστοιχίζει την

$$\text{διαφορίων 2-μορφών } \alpha f \in \prod_{p \in A} T'(\mathbb{R}_p^n) \text{ που}$$

ορίζεται πριν.

Με βάση τους παραπάνω συμβολισμούς θα δείξουμε τώρα
την εξής πρόταση.

Πρόταση 2.17

Η συνάρτηση d που ορίζεται πριν είναι γραμμική.

Απόδειξη (ευθείας έλεγχος)

Έστω $f, g \in C^\infty(A)$. Πραφανώς, $f+g, \lambda f \in C^\infty(A)$ για $\lambda \in \mathbb{R}$.

Στηθεροποιούμε ένα $p_0 \in A$.

Από τον ανειροστικό λογισμό III γνωρίζουμε ότι

$$\text{ισχύει: } D(f+g)(p_0) = Df(p_0) + Dg(p_0) \quad (1) \text{ και}$$

$$D(\lambda f)(p_0) = \lambda \cdot Df(p_0) \text{ για } \lambda \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Έστω τυχαίο $u_{p_0} \in T_{p_0}^n$. Έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned} (d(f+g)(p_0))(u_{p_0}) &\stackrel{\text{ορίζεται ως } d(f+g)}{=} (D(f+g)(p_0))(u) \stackrel{(1)}{=} \\ &= (Df(p_0) + Dg(p_0))(u) \stackrel{\text{ορίζεται ως άθροισμα τεσσάρων}}{=} \\ &= (Df(p_0))(u) + (Dg(p_0))(u) \stackrel{\text{ορίζεται ως } d f(p_0), d g(p_0)}{=} \\ &= (df(p_0))(u_{p_0}) + (dg(p_0))(u_{p_0}) \stackrel{\text{ορίζεται ως άθροισμα τεσσάρων}}{=} \\ &= (df(p_0) + dg(p_0))(u_{p_0}) \stackrel{\text{ορίζεται ως άθροισμα διφ. μορφών}}{=} \\ &= ((df + dg)(p_0))(u_{p_0}) \quad (3) \end{aligned}$$

(87)

Από το (3) ισχύει για το σημείο $p_0 \in A$ και το
 σημείο $u_{p_0} \in \mathbb{R}^n$ έπεται ότι ισχύει:

$$d(f+g) = df + dg \quad (4).$$

Παρόμοια έβγαζε για το $p_0 \in A$ και
 το $u_{p_0} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} ((d(\lambda f))(p_0))(u_{p_0}) &\stackrel{\text{ορίσμος } d(\lambda f)}{=} (D(\lambda f)(p_0))(u) \stackrel{(2)}{=} \\ &\stackrel{\text{ορίσμος } \lambda \cdot Df(p_0)}{=} (\lambda(Df(p_0)))(u) \stackrel{\text{ορίσμος } d f(p_0)}{=} \lambda \cdot (Df(p_0)(u)) = \\ &\stackrel{\text{ορίσμος } \lambda \cdot d f(p_0)}{=} \lambda \cdot ((d f(p_0))(u_{p_0})) \stackrel{\text{ορίσμος } \lambda \cdot d f}{=} \lambda \cdot ((\lambda \cdot d f)(p_0))(u_{p_0}) \\ &= ((\lambda \cdot d f)(p_0))(u_{p_0}) \quad (5). \end{aligned}$$

Από το (5) ισχύει για το σημείο $p_0 \in A$ και το σημείο
 $u_{p_0} \in \mathbb{R}^n$ έπεται ότι:

$$d(\lambda f) = \lambda df \quad \text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \text{ και } f \in C^\infty(A) \quad (6)$$

Η (4) και (6) δείχνουν ότι η d είναι γραμμική.

Στην σελίδα 23 ορίσαμε το άθροισμα οποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους διαφορετικών μέρων.

Αμέσως βλέπουμε πως η πρόταση 2.17 είναι το ακόλουθο πρόβλημα.

Πρόβλημα 2.18

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A ανοιχτό.

Έστω $f_i, i=1,2,\dots,m$ για $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ να

είναι C^∞ -συναρτήσεις, $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ για $i=1,2,\dots,m$. Προφανώς το άθροισμά τους $\sum_{i=1}^m f_i$

είναι C^∞ συνάρτηση και ισχύει

$$d(f_1 + f_2 + \dots + f_m) = df_1 + df_2 + \dots + df_m \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d\left(\sum_{i=1}^m f_i\right) = \sum_{i=1}^m df_i.$$

Απόδειξη (επαγωγής)

Για $m=2$ το αποτέλεσμα έπεται από την πρόταση 2.17

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα

ισχύει για n και θα δείξουμε ότι ισχύει για $n+1$.

Έστω $f_i, i=1,2,\dots,n+1$ C^∞ -συναρτήσεις $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$

για $i=1,2,\dots,n+1$. Προφανώς η βωφρ746η

$$\sum_{i=1}^n f_i \in \mathcal{A}, C^\infty \text{ στο } A.$$

Από την περίπτωση για $m=2$ ισχύει ότι

$$d\left(\sum_{i=1}^{n+1} f_i\right) = d\left(\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n f_i\right)}_{\text{από το } \mathcal{A} \text{ και } \mathcal{B} \text{ στο } \mathcal{A}} + f_{n+1}\right) =$$

$$= d\left(\sum_{i=1}^n f_i\right) + df_{n+1} \quad (1)$$

Επειδή από την επαγωγική υπόθεση το αποτέλεσμα ισχύει για η βωφρ746η έχουμε ότι:

$$d\left(\sum_{i=1}^n f_i\right) = \sum_{i=1}^n df_i \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι:

$$d\left(\sum_{i=1}^{n+1} f_i\right) = \sum_{i=1}^n df_i + df_{n+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} df_i, \text{ όπου η τελευταία ισότητα ισχύει από}$$

τον ορισμό του λειτουργικού αθροίσματος διαφορίων μορφών στην περίπτωση 23.

(90)

Άρα το αποτέλεσμα ισχύει για το u με την υπόθεση ότι ισχύει για το u και όλα τα αρχικά με μαθηματικούς επαγωγές έλθεται το αποτέλεσμα. ■

Με τις ενότητες προτάσεις παραθέτουμε κάποιες χρήσιμες για τη συνέχεια ιδιότητες του διαφορίσιμου μιας διαφορίσιμης συνάρτησης.

Πρόταση 2.19

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $A \neq \emptyset$.

Έστω $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι δύο C^∞ συναρτήσεις.

Τότε ισχύει:

$$d(fg) = f dg + g df$$

Απόδειξη (μεταξύ άλλων)

Επιθερονοιάμε να $p_0 \in A$. Έστω $u \in \mathbb{R}^n$.

Έχουμε:

$$((d(fg))(p_0))(u_{p_0}) \stackrel{\text{ορίσμος}}{=} D(fg)(p_0)(u) \stackrel{\text{γινώσκω}}{=}$$

$$= (\nabla(fg)(p_0)) \cdot u \stackrel{\text{γινώσκω}}{=}$$

$$= (g(p_0) \cdot \nabla f(p_0) + f(p_0) \cdot \nabla g(p_0)) \cdot u \stackrel{\text{ιδιότητα διανυσμάτων}}{=}$$

$$= (g(p_0) \cdot \nabla f(p_0)) \cdot u + (f(p_0) \cdot \nabla g(p_0)) \cdot u \stackrel{\text{ιδι. διανυσμάτων}}{=}$$

$$= g(p_0) \cdot (\nabla f(p_0) \cdot u) + f(p_0) \cdot (\nabla g(p_0) \cdot u) \stackrel{\text{γινώσκω}}{=}$$

(91)

$$= g(p_0) \cdot Df(p_0)(u) + f(p_0) \cdot Dg(p_0)(u) \quad \underline{\underline{\text{οριζήσομε}}}$$

$$= g(p_0) \cdot (df(p_0))(u_{p_0}) + f(p_0) \cdot (dg(p_0))(u_{p_0}) \quad \underline{\underline{\text{οριζήσομε}}}$$

$$= (g(p_0) \cdot df(p_0))(u_{p_0}) + (f(p_0) \cdot dg(p_0))(u_{p_0}) \quad \underline{\underline{\text{οριζήσομε}}}$$

$$= (g(p_0) \cdot df(p_0) + f(p_0) \cdot dg(p_0))(u_{p_0}) \quad \underline{\underline{\text{οριζήσομε}}}$$

$$= ((g \cdot df) + (f \cdot dg))(p_0)(u_{p_0}) \quad \underline{\underline{\text{οριζήσομε}}}$$

$$= ((g \cdot df + f \cdot dg)(p_0))(u_{p_0})$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $p_0 \in A$ και κάθε $u \in \mathbb{R}^n$ έπεται,

οτι $df \cdot g = f \cdot dg + g \cdot df$, δηλαδή το ζητούμενο. ■

Πρόταση 2.20 $\downarrow$ (ότι η πρόταση αυτή είναι αληθής και η επιφώνισή της)

Έστω $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, όπου

$f(A) \subseteq B$, για μια διαφορίσιμη συνάρτηση

$f: A \rightarrow B$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη.

Τότε το $dg \circ f \in T'(\mathbb{R}^m)$ και ισχύει:

$$dg \circ f = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ f \right) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \cdot dx^i$$

Απόδειξη

Έστω $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, για $i=1, 2, \dots, m$ και $n \in \mathbb{N}$

α) βωτρετρηέτες βωαρηέτες τμ f όνου:

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ για υόθε

$x \in A$, που ορίσωντα, ως: $f_i = p_{z_i} \circ f$ για $i=1, 2, \dots, m$,

όπου $p_{z_i} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ με $p_{z_i}(x) = x_i$ για υόθε

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Έστω τώρα βταθερο $p_0 \in A$

Είνα δ νω βτο τώρα ότι:

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(p_0) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(p_0)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p_0) \quad \text{για}$$

υόθε $i=1, 2, \dots, n$. Προφανώς $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$

Έστω $u \in \mathbb{R}^n$. Έχουμε τώρα ο $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

$$((\partial (g \circ f))(p_0))(u_{p_0}) \stackrel{\text{φίλι}}{=} D(g \circ f)(p_0)(u) \stackrel{\text{γνωσ}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(p_0) \cdot u_i \quad \frac{\text{γνωσ από (1)}}{\text{και } u_i = \partial x^i(p_0)(u_{p_0})}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ f \right) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) (p_0) \right) \cdot \partial x^i(p_0)(u_{p_0})$$

(93)

$$= \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ f \right) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) dx^i \right) \right) (p_0) (u_{p_0}) (z)$$

Αφού η (2) ισχύει για το ζεύγος (p_0, u_{p_0}) έχουμε $p_0 \in A$ και $u \in \mathbb{R}^n$ είναι ότι:

$$d(g \circ f) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ f \right) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) dx^i \right)$$

Σημειώνουμε το παραπάνω

Πρόταση 2.21 $\downarrow$ Βασική πρόταση η επιφύλαξη μόνο

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1) Αν $i, j \in T_n$ τότε

$$dx^i \wedge dx^j = - (dx^j \wedge dx^i)$$

2) $dx^i \wedge dx^i = 0$ για κάθε $i \in T_n$

3) Έστω $i_1, i_2, \dots, i_n \in T_n$ με $i_1 < i_2 < \dots < i_n$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Τότε

$$dx^{i_1} \wedge (dx^{i_2} \wedge dx^{i_3} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) = (-1)^k (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) \wedge dx^{i_k}$$

για κάθε $i \in T_n$

β) αν $u, v, w \in \mathbb{N}$ με $u, v, w \geq 1$ και $u+v+w \leq n$ και ω, η, θ είναι αντίστοιχα u, v και w διαφοριές μορφών στον $\mathbb{R}^n$ τότε ισχύει η προσεταιριστικότητα ιδιότητα των διαφοριών μορφών, δηλαδή

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$$

γ) $\omega \wedge \eta = (-1)^{uv} (\eta \wedge \omega)$

δ) $dx^i \wedge (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = 0$ αν $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$.

ε) Έστω $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ να είναι m -διαφοριές μορφές στον n -χώρο u -μορφής στον $\mathbb{R}^n$ για $m \geq 2$, $u < n$ και θ να είναι μία l -μορφή

στον $\mathbb{R}^n$ ώστε $u+l \leq n$. Τότε ισχύει:

i) $(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m) \wedge \theta = (\omega_1 \wedge \theta) + (\omega_2 \wedge \theta) + \dots + (\omega_m \wedge \theta) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^m \omega_i \right) \wedge \theta = \sum_{i=1}^m (\omega_i \wedge \theta).$

ii) $\theta \wedge (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m) = (\theta \wedge \omega_1) + (\theta \wedge \omega_2) + \dots + (\theta \wedge \omega_m) \Leftrightarrow$
 $\theta \wedge \left(\sum_{i=1}^m \omega_i \right) = \sum_{i=1}^m (\theta \wedge \omega_i)$

(95)

3) Έστω ω να είναι κ-μορφή στον $\mathbb{R}^n$ και
 η να είναι ℓ -μορφή στον $\mathbb{R}^n$ για $k+\ell \leq n$. Τότε
 για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lambda. (\omega \wedge \eta) = (\lambda \omega) \wedge \eta = \omega \wedge (\lambda \eta).$$

4) Αν ω είναι κ-μορφή στον $\mathbb{R}^n$ και 0 είναι η
 ℓ -μυδενική μορφή στον $\mathbb{R}^n$ για $k+\ell \leq n$ τότε i)
 $\omega \wedge 0 = 0 \wedge \omega = 0$ όπου το τελευταίο 0 είναι
 η μυδενική $(k+\ell)$ -μορφή στον $\mathbb{R}^n$

και ii) $\omega \otimes 0 = 0 \otimes \omega = 0$ παρόμοια.

Απόδειξη

Σε αυτή την πρόταση έχουμε συστηματοώσει πολλές
 ιδιότητες του αλγεβρικού λογισμού των διαφορικών μορφών
 οι οποίες είναι γενικές. Θα αποδείξουμε αυτές στην απόδειξη
 αλλά και σωστά που θα βρούμε.

Για τις περισσότερες θα βρούμε τις ιδιότητες 1), 2), 3)
 και 4) της σελίδας 112 των πρώτων συγγραφέων.

Δεν θα τις αποδείξουμε με την σειρά που τις γράφουμε.
 Επειδή είναι πολλές αυτές που θα αναφέρουμε μόνο
 μερικά στοιχεία, και ότι δεν αποδεικνύουμε αφ'εαυτά, βλ.
 εγχειρίδιο για τον αναγνώστη.

(96)

As αρχίσαμε την 3), 4).

Έστω $p_0 \in \mathbb{R}^n$ σταθερό.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } (\omega \wedge \eta)(p_0) &\stackrel{\text{ορισμός}}{=} \omega(p_0) \wedge \eta(p_0) \quad \text{ή ως ιδιότητα} \\ &\stackrel{\text{ορισμός}}{=} (-1)^{u \cdot \ell} (\eta \wedge \omega)(p_0) \quad \text{ορισμός} \\ &= (-1)^{u \cdot \ell} (\eta \wedge \omega)(p_0). \end{aligned}$$

Αφού αυτό ισχύει για το τυχαίο σταθερό $p_0 \in \mathbb{R}^n$ (το οποίο βέβαια δεν έχει καμία ιδιότητα ιδιότητα) θα ισχύει και για κάθε άλλο $p \in \mathbb{R}^n$. Αντάδω ισχύει:

$$(\omega \wedge \eta)(p) = (-1)^{u \cdot \ell} (\eta \wedge \omega)(p) \text{ για κάθε } p \in \mathbb{R}^n. \text{ Άρα}$$

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{u \cdot \ell} (\eta \wedge \omega).$$

Ανάλογα αποδεικνύεται και η 3) β).

Επίσης οι ε) i) και ii) αποδεικνύονται ανάλογα με μεθόδους εισαγωγής. Παρόμοια και η δ).

Η γ) προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς.

Θα δείξουμε τώρα την 3) α) χρησιμοποιώντας την 3) δ).

Από την 3) δ) για $\omega = dx^i$, $\eta = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_\ell}$ παίρνουμε το αποτέλεσμα.

Η 1) έπεται από το 3) δ) για $u = \ell = 1$.

Από το 1) για $i = j$ έχουμε

(97)

$$\partial x^i \wedge \partial x^i = - (\partial x^i \wedge \partial x^i) \Rightarrow$$

$$2 (\partial x^i \wedge \partial x^i) = 0 \leftarrow (\text{η μηδενική διαφορική μορφή})$$

$$\Rightarrow \partial x^i \wedge \partial x^i = 0 \quad (\text{αφού το άνω } \wedge)$$

$\prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^2(\mathbb{R}^n_p)$ είναι διανυσματικός χώρος για

$$\partial x^i \wedge \partial x^i \in \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^2(\mathbb{R}^n_p) \quad \text{για} \quad \text{αυτή}$$

$$\lambda \cdot v = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ή} \quad v = 0 \quad \text{σε ένα διανυσματικό χώρο}$$

$$\text{για } \lambda = 2, v = \partial x^i \wedge \partial x^i$$

Μας έμεινε μόνο η 3) δ)

Αν $n=1$, έπεται από το 2.

Θα το δείξουμε επαγωγικά.

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, θα το δείξουμε για $n+1$.

Έστω ότι $n < n$.

Έστω ότι: $i \in \{i_1, \dots, i_n\}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \partial x^i \wedge (\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_{n+1}}) &= \partial x^i \wedge (\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \wedge \partial x^{i_{n+1}} \\ &= (\partial x^i \wedge (\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n})) \wedge \partial x^{i_{n+1}} = 0 \wedge \partial x^{i_{n+1}} = 0 \end{aligned}$$

↑
προσεταιριστικότητα

↑
υποθέτουμε για το n

↑
από το 3) η) i)

(98)

Εξάγω ότι $i = i_{n+1}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & \partial x^i \wedge (\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_{n+1}}) \xrightarrow{\text{οριζόντιο}} \\
 &= \partial x^i \wedge ((\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \wedge \partial x^{i_{n+1}}) \xrightarrow{\text{3) 9)}} \\
 &= \partial x^i \wedge ((-1)^n (\partial x^{i_{n+1}} \wedge (\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}))) \xrightarrow{\text{3) 5)}} \\
 &= \partial x^i \wedge ((-1)^n \partial x^{i_{n+1}}) \wedge (\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \xrightarrow{\text{προσχωρούμε. οριζόντιο}} \\
 &= (\partial x^i \wedge (-1)^n \partial x^{i_{n+1}}) \wedge (\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \xrightarrow{\text{3) 5)}} \\
 &= (-1)^n (\partial x^i \wedge \partial x^{i_{n+1}}) \wedge (\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \xrightarrow{\text{3) 2)}} \\
 &= (-1)^n \cdot 0 \wedge (\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \xrightarrow{\text{ιδιότητα διανυσματος}} \\
 &= 0 \cdot (\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \xrightarrow{\text{3) 5) i)}} 0. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Επαφύπνιση έλκεται τώρα η ιδιότητα αυτή

Παρατήρηση 2.2α

Όλες οι ιδιότητες των κερμάτων 2.2) ισχύουν με την ίδια ανάλυση, αν οι θεωρούμενες διαφορίσιμες μορφές ορίζονται σε ένα n -διάστατο χώρο $\mathbb{R}^n$ και όχι σε $\mathbb{R}^m$.

Μια ημισυνέχεια κατασκευής που συνδέεται με διαφορικές μορφές γενικεύει το τελευταίο α των διαφοροποιήσεων σωστής σε διαφορικές μορφές.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$. Θεωρούμε μια διαφορική k -μορφή ω στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή

$$\omega \in \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Sigma^k(\mathbb{R}^n_p). \text{ Τότε όπως γνωρίζουμε}$$

από τις πρώτες σημειώσεις για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in (T_n^k)^*$

υπάρχει μια διαφοροποίηση σωστής

$$\omega_{i_1, i_2, \dots, i_k} \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ ώστε να ισχύει:}$$

$$\omega(p) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in (T_n^k)^*} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}(p) \cdot (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})_p$$

$$= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in (T_n^k)^*} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_k}(p) \cdot (dx^{i_1}(p) \wedge dx^{i_2}(p) \wedge \dots \wedge dx^{i_k}(p))$$

(βλίδας 179 των πρώτων σημειώσεων),
για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$.

Χρησιμοποιώντας τη ανάλυση της θεωρίας των δένδρων, υπάρχει μια βήση η πρόταση 2.2 αποδεικνύεται, ότι υπάρχει μια μοναδική $(n+1)$ -μορφή στον $\mathbb{R}^n$ που την συμβολίζουμε με ω για την οποία ισχύει:

$$(\omega)(p) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^*)^*} (\omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}(p) \wedge (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n})(p))$$

$$= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^*)^*} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}(p) \wedge dx^{i_1}(p) \wedge \dots \wedge dx^{i_n}(p)$$

για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή $\omega \in \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^{n+1}(\mathbb{R}_p^n)$,

όπου $\forall \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n} \in \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \mathbb{R}'(\mathbb{R}_p^n)$ συμβολίζουμε

την διαφορική 1-μορφή που ορίζεται από την πρόταση

2.2 για την συνάρτηση $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^*)^*$.

Παρόμοια ορίζεται η ω σε ένα φυσικό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$, αν η ω ορίζεται στο A .

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n < \infty$.

Θεωρούμε από τις n -διαφορίσιμες μορφές του A ,

μόνο αυτές που ορίζονται, από C^∞ συναρτήσεις.

Διότι θεωρούμε το σύνολο

$$\prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p) := \left\{ \omega \in \prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p) \mid \right.$$

υπάρχουν C^∞ συναρτήσεις $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ για
 οι οποίες $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in (\mathbb{T}^n)^*$ ώστε να ισχύει:

$$\omega(p) = \sum_{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in (\mathbb{T}^n)^*} \omega_{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n}(p) \cdot (dx^{\omega_1}(p) \wedge dx^{\omega_2}(p) \wedge \dots \wedge dx^{\omega_n}(p))$$

για τις οποίες $p \in A$.

Από το αξίωμα του ετερογένειας το $\prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p)$ είναι

ένα ιαλόν ορκεμένο σύνολο και όπως αναφέρεται
 στο βιβλίο του Μανόλη, υποθέτουμε να δείμε ότι αυτό το σύνολο είναι
 μη κενό και μάλλον να δείξουμε ότι

(102)

για οποιαδήποτε επιλογή C^∞ συναρτήσεων

$\omega_{i_1, i_2, \dots, i_n} : A \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^*)^*$

υπάρχει ακριβώς μία διαφορίσιμη μορφή $\omega \in \prod_{p \in A}^\infty \Omega^n(\mathbb{R}^n_p)$

για την οποία ισχύει ότι

$$\omega(p) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^*)^*} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}(p) \cdot (\partial x^{i_1}(p) \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}(p))$$

για κάθε $p \in A$.

Επίσης είναι προφανές ε' ορισμού ότι

$$\prod_{p \in A}^\infty \Omega^n(\mathbb{R}^n_p) \subsetneq \prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p) \text{ και είναι εύκολο να δούμε}$$

ότι το σύνολο $\prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p)$ είναι υπερίσως ως προς την

αρχίτες της πρόθεσης και του αριθμητικού ολοκληρώματος που ορίζονται στο $\prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p)$.

Επί το σύνολο $\prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p)$ ορίζεται και αυτός

διανυσματικός χώρος με τον ορισρισμό των αρχίτων και πρόθεσης και του αριθμητικού ολοκληρώματος στο $\prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p)$.

$p \in A$

Έστω τώρα $\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}_p^n)$. Τότε

υπάρχουν μοναδικά ορισμένες C^∞ -συναρτήσεις
 $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_n} : A \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^n)^*$
 ώστε να ισχύει:

$$\omega(p) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^n)^*} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}(p) \cdot (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n})(p)$$

$$= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^n)^*} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}(p) \cdot (dx^{i_1}(p) \wedge dx^{i_2}(p) \wedge \dots \wedge dx^{i_n}(p))$$

για κάθε $p \in A$ (*).

Τώρα αποδεικνύεται, όπως στην πρόταση 2.2 ότι

υπάρχει μια μοναδική $(n+1)$ -μορφή στον A που
 την συμβολίζουμε με $d\omega$ ώστε $d\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^{n+1}(\mathbb{R}_p^n)$
 ώστε να ισχύει:

$$d\omega(p) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^n)^*} (d\omega_{i_1, i_2, \dots, i_n})(p) \wedge dx^{i_1}(p) \wedge \dots \wedge dx^{i_n}(p)$$

για κάθε $p \in A$. (**)/(**)

Επίσης από τα προηγούμενα έπεται ότι ορίζεται η 1^α συνάρτηση που εξαρτάται από τα n, u, A που την συμβολίζουμε με $a_{n,u,A}$, όπου

$$a_{n,u,A} : \prod_{p \in A} \mathbb{Z}^u(\mathbb{Q}_p^n) \rightarrow \prod_{p \in A} \mathbb{Z}^{u+1}(\mathbb{Q}_p^n) \text{ για}$$

την οποία φέρει ότι για κάθε $\omega \in \prod_{p \in A} \mathbb{Z}^u(\mathbb{Q}_p^n)$,

$$a_{n,u,A}(\omega) = a\omega.$$

Ας το αποδείξουμε αυτό (η απόδειξη αυτή είναι εντός ύλης)

Για κάθε $\omega \in \prod_{p \in A} \mathbb{Z}^u(\mathbb{Q}_p^n)$ ορίζουμε την

γραμμική ορισμένη διαφορική $(u+1)$ μορφή στο A

$a\omega$ που ορίζουμε πριν.

Ο τελεστής ο οποίος σε κάθε ω ορίζει την $a\omega$

προφανώς είναι ορισμένος από τον τρόπο ορισμού του.

Επί για κάθε $\omega \in \prod_{p \in A} \mathbb{Z}^u(\mathbb{Q}_p^n)$ ορίζεται το

μονοώνυσμο $A_\omega = \{ a\omega \}$. Από το αξίωμα σχέσης

αντιστοιχίας ορίζεται τώρα το σύνολο $\beta := \{ A_\omega, \omega \in \prod_{p \in A} \mathbb{Z}^u(\mathbb{Q}_p^n) \}$

(*) Θέλει να αποδείξει ότι ορίζεται τέτοια συνάρτηση

Από το αλίσμα γ ως προς $\mathcal{O}$ ορίζεται το σύνολο

$$\cup \beta = \bigcup_{\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^u(\mathcal{O}_p^n)} \Lambda_\omega \subseteq \prod_{p \in A} \Omega^{u+1}(\mathcal{O}_p^n).$$

Από το αλίσμα γ ως προς $\mathcal{O}$ ορίζεται τώρα το

$$\text{αριθμητικό συνόλου } \Gamma = \prod_{\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^u(\mathcal{O}_p^n)} \Lambda_\omega. \text{ Είναι}$$

εύκολο να δούμε ότι το Γ είναι μονοσύνολο και όπως
 στην πρόταση 2.2 αποδεικνύεται ότι: αν $\Gamma = \{ \eta \}$ τότε

$$\eta \in \left(g: \prod_{p \in A} \Omega^u(\mathcal{O}_p^n) \rightarrow \prod_{p \in A} \Omega^{u+1}(\mathcal{O}_p^n) \right)$$

Ορίζεται η

$$\eta: \prod_{p \in A} \Omega^u(\mathcal{O}_p^n) \rightarrow \prod_{p \in A} \Omega^{u+1}(\mathcal{O}_p^n) \text{ είναι}$$

μία συνάρτηση με κενό ορισμού το $\prod_{p \in A} \Omega^u(\mathcal{O}_p^n)$ και

κέντρο τιμών το $\prod_{p \in A} \Omega^{u+1}(\mathcal{O}_p^n)$ για το οποίο

ισχύει ότι: $\eta(\omega) = \alpha\omega$ για κάθε $\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^u(\mathcal{O}_p^n)$.

Αντί των σωδρπύων την συμβολίζουμε με α, γ, A .
Αν δεν υπάρχει υπόνοος ώςχους συμβολίζουμε την α, γ, A κατά με α .

Επί, ορίζεται κατά η σωδρπύ

$$\alpha : \prod_{p \in A} \mathbb{R}^n(p) \rightarrow \prod_{p \in A} \mathbb{R}^{n+1}(p)$$

να ισχύει $\alpha(\omega) = \alpha\omega$ για κάθε $\omega \in \prod_{p \in A} \mathbb{R}^n(p)$.

Μια πρώτη ιδιότητα της α είναι ότι είναι γραμμική.

Πρόταση 2.23

Η σωδρπύ α που ορίζουμε παραπάνω είναι γραμμική σωδρπύ. (βλ. βλ. βλ.)

Απόδειξη

Όπως είχαμε παραπάνω τα στοιχεία $\prod_{p \in A} \mathbb{R}^n(p)$ και

$\prod_{p \in A} \mathbb{R}^{n+1}(p)$ είναι διανυσματικοί χώροι, οπότε έχει

π.ε.α να αναγνωρισθεί σαν η α είναι γραμμική.

$$\text{Έστω } \omega_1 \in \prod_{p \in A}^\infty \Omega^4(\mathbb{P}_p^n) \text{ και } \omega_2 \in \prod_{p \in A}^\infty \Omega^4(\mathbb{P}_p^n).$$

Τότε υπάρχουν μοναδικές οριζόμενες συναρτήσεις C^∞

$$\omega'_{i_1, i_2, \dots, i_n} : A \rightarrow \mathbb{P} \text{ για κάθε } (i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^* \text{ ώστε:}$$

$$\omega_1 = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*} \omega'_{i_1, i_2, \dots, i_n} (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n})_{(1)},$$

υπάρχουν μοναδικές οριζόμενες συναρτήσεις C^∞

$$\omega^2_{i_1, i_2, \dots, i_n} : A \rightarrow \mathbb{P} \text{ για κάθε } (i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^* \text{ ώστε:}$$

$$\omega_2 = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*} \omega^2_{i_1, i_2, \dots, i_n} (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n})_{(2)}.$$

Αρα από τα (1) και (2) έχουμε:

$$\omega_1 + \omega_2 \stackrel{\text{ορίζεται}}{=} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*} \omega'_{i_1, i_2, \dots, i_n} (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) +$$

$$+ \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*} \omega^2_{i_1, i_2, \dots, i_n} (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) =$$

→ ιδιότητα απορρόφησης

$$= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*} (\omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}^1 (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) + \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}^2 (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}))$$

→ επιμεριστική ιδιότητα

$$= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*} (\omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}^1 + \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}^2) (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \quad (3)$$

Από την (3) έχουμε:

$$\partial(\omega_1 + \omega_2) \stackrel{\text{απορρόφησης}}{=}$$

$$= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*} \partial(\omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}^1 + \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}^2) \wedge \partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n} =$$

→ πρόταση 2.17

$$= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*} (\partial \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}^1 + \partial \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}^2) \wedge \partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n} =$$

→ επιμεριστική ιδιότητα

$$= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*} (\partial \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}^1 \wedge \partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n} + \partial \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}^2 \wedge \partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) =$$

→ ιδιότητα απορρόφησης

$$= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*} \partial \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}^1 \wedge \partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n} +$$

(109)

$$\sum \omega^2_{i_1, i_2, \dots, i_n} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \quad \underline{\text{οριζήσ.}}$$

$$(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*$$

$$= \omega_1 + \omega_2.$$

$$\text{Άρα έχουμε } d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2.$$

$$\text{Έστω } \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Έχουμε: } \lambda \omega_1 = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*} (\lambda \omega'_{i_1, i_2, \dots, i_n}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$$

↑ ιδιότητα του δ.χ των διαφ. μορφών

$$d(\lambda \omega_1) \stackrel{\text{οριζήσ.}}{=} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*} d(\lambda \omega'_{i_1, i_2, \dots, i_n}) \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} =$$

$$\stackrel{\text{γρήγορη 2.17 και ιδιότητα του διαφ. χώρου των διαφορικών μορφών}}{=} \lambda \cdot \left(\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*} d\omega'_{i_1, i_2, \dots, i_n} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \right) =$$

$$\stackrel{\text{γρήγορη 2.17}}{=} \lambda d\omega_1. \text{ Άρα } \omega \wedge d \text{ είναι γραμμική.} \blacksquare$$

Πρόταση 2.24

Με τους παραπάνω συμβολισμούς. Έστω ω_i , για $i=1, 2, \dots, m$, για $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ με $\omega_i \in \prod_{p \in A} \Omega^p(\mathbb{R}^n)$.

$$\text{Τότε: } d\left(\sum_{i=1}^m \omega_i\right) = \sum_{i=1}^m d\omega_i.$$

↓ Επείδη αυτός η απόδειξη

Απόδειξη (παρόμοια με το πρόταση 2.18) (παράλειψη)
 επείδη αυτός

Παρατήρηση 2.25 (επ' ουδένος)

Επών παραπάνω πρόταση 2.23 χρησιμοποιούμε ως προφανείς (από τη συσφραγισμένη) ιδιότητες του διανυσματικού χώρου των διαφοριικών μορφών $\prod_{r \in A} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}^r(\mathcal{B}_r^{\mathcal{U}})$ για να και την

εξής ιδιότητα των αθροισμάτων $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}^r(\mathcal{B}_r^{\mathcal{U}})$ ενός διανυσματικού χώρου:

Έστω $u_1, u_2, \dots, u_m$ και $v_1, v_2, \dots, v_m$ να είναι, δύο

ομογενείς πεπερασμένου μήθους διανυσμάτων

εως διανυσματικού χώρου V για μήκος $m \in \mathbb{N}$ και $m \geq 1$.

Τότε ισχύει: $\sum_{i=1}^m u_i + \sum_{i=1}^m v_i = \sum_{i=1}^m (u_i + v_i)$.

Θα είς ότι πρόταση 2.23 χρησιμοποιούμε αυτή την ιδιότητα όταν τα διανυσματικά $u_i, v_i, i=1, 2, \dots, m$ είναι, διαφοριικές $\mathcal{U}$ -μορφές στο A που ανήκουν στον διανυσματικό χώρο $\prod_{r \in A} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}^r(\mathcal{B}_r^{\mathcal{U}})$.

Για την συνέχεια θα χρησιμοποιούμε ένα λήμμα.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ για $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ με $i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n$ και $j_1, j_2, \dots, j_\ell \in \mathbb{N}$ με $j_1 < j_2 < \dots < j_\ell \leq n$. Έστω $A_1 = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ και $B_1 = \{j_1, j_2, \dots, j_\ell\}$ και ότι ισχύει: $A_1 \cap B_1 = \emptyset$.

Είναι προφανές ότι τότε υπάρχουν μοναδικά ορισμένοι αριθμοί $v_1, v_2, \dots, v_u, v_{u+1}, \dots, v_{u+l} \in \mathbb{N}$ ώστε

$v_i < v_{i+1}$ για κάθε $i=1, 2, \dots, u+l-1$ ώστε

$$\text{αν } \Gamma_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_{u+l}\}, \text{ τότε: } A, \cup B_1 = \Gamma_1.$$

Με τους παραπάνω συμβολισμούς ισχύει το ελγ.

λήμμα:

Πρόταση 2.26 ✓ ~~αυτός είναι το λήμμα για το~~
~~εμφάνεται αυτός είναι~~

Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{Z}, -1$ ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned} & (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u}) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_l}) = \\ & = \lambda \cdot (\partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{u+l}}) \end{aligned}$$

Απόδειξη

Θα κάνουμε την απόδειξη επαγωγικά πάνω στο πλήθος των όρων της μορφής $\partial x^{j_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_l}$.

Για $l=1$. Διαμελώνουμε δυο περιπτώσεις:

α) $i_u < j_1$. Τότε προφανώς έχουμε ότι:

$$v_p = i_p \text{ για κάθε } p=1, 2, \dots, u \text{ και } v_{u+1} = j_1 \text{ και}$$

$$\text{άρα: } (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u}) \wedge \partial x^{j_1} = \partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{u+1}}$$

και το αποτέλεσμα ισχύει για $\lambda=1$.

β) $j_1 < i_u$. Τώρα πάλι διαμελώνουμε δυο περιπτώσεις

ι) $i_1 < j_1$. Τότε είναι προφανές ότι υπάρχει μοναδικός

$p \in \{1, \dots, u-1\}$ ώστε $i_p < j_1 < i_{p+1}$

Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u}) \wedge \partial x^{j_1} \\
 &= (\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_p} \wedge \partial x^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u}) \wedge \partial x^{j_1} \quad \text{προσέτ. 1.1 δότ. 179} \\
 &= ((\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_p}) \wedge (\partial x^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u})) \wedge \partial x^{j_1} \quad \text{προσ. 1.1 δότ. 179} \\
 &= (\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_p}) \wedge ((\partial x^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u}) \wedge \partial x^{j_1}) \\
 &= (\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_p}) \wedge (-1)^{(u-p)} (\partial x^{j_1} \wedge (\partial x^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u})) \\
 &= (-1)^{u-p} ((\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_p}) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge (\partial x^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u}))) \\
 &= (-1)^{u-p} (\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_p} \wedge \partial x^{j_1} \wedge \partial x^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u}) = \\
 &= (-1)^{u-p} (\partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{u+1}}). \quad \text{Ισχύει το αποτέλεσμα για} \\
 &\text{για } \lambda = (-1)^{u-p}.
 \end{aligned}$$

ii) $j_1 < i_1$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u}) \wedge \partial x^{j_1} = (-1)^u (\partial x^{j_1} \wedge (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u})) \\
 &= (-1)^u (\partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{u+1}})
 \end{aligned}$$

προσέτ. 1.1 δότ. 179 για $v_1, v_2, \dots, v_{u+1}$.

Επίσης ισχύει το αποτέλεσμα για $\ell=1$

Υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για κάποιο $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 1$ και θα δείξουμε ότι ισχύει και για $l+1$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} & (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_l}) \wedge (dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_{l+1}}) \stackrel{\text{προβέρ.}}{=} \\ &= (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_l}) \wedge ((dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) \wedge dx^{j_{l+1}}) \\ & \stackrel{\text{προβέρ.}}{=} ((dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_l}) \wedge (dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l})) \wedge dx^{j_{l+1}} = \\ & \stackrel{\text{επαγωγική υπόθεση}}{=} \lambda_1 (dx^{v_1} \wedge dx^{v_2} \wedge \dots \wedge dx^{v_{l+l}}) \wedge dx^{j_{l+1}} = \\ &= \lambda_1 \cdot (\lambda_2 (dx^{v_1} \wedge dx^{v_2} \wedge \dots \wedge dx^{v_{l+l+1}})) \stackrel{\text{υπέρθεση για } l=1 \text{ που δίνει } \lambda_1 \lambda_2}{=} \\ &= (\lambda_1 \lambda_2) (dx^{v_1} \wedge dx^{v_2} \wedge \dots \wedge dx^{v_{l+l+1}}), \text{ όπου προφανώς} \end{aligned}$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \{1, -1\}$ και οι $v_1, v_2, \dots, v_{l+l+1}$ είναι οι μοναδικές ορισμένες φυσικοί αριθμοί που ορίζονται από τα $i_1, i_2, \dots, i_l, j_1, j_2, \dots, j_l, j_{l+1}$.
Έτσι επαγωγικά δείχνει το αποτέλεσμα. ■

Παρατήρηση 2.27

Από την απόδειξη του προηγούμενου lemma φαίνεται και ο πρώτος υπολογισμός του λ .
Επισημαίνουμε επίσης εδώ κάποιες σημαντικές ιδιότητες οι οποίες είναι πολύ αυτές των απόδειξης και αφορούν στον αναγνώστη ως άσκηση.

1) Έστω $i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_\ell \in \mathbb{N}$ και $u, \ell \in \mathbb{N}$
 με $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ και $j_1 < j_2 < \dots < j_\ell$.

Θέτουμε $A_1 = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ και $B_1 = \{j_1, j_2, \dots, j_\ell\}$.

Αν $A_1 \cap B_1 \neq \emptyset$, τότε ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} & (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_\ell}) = \\ & = 0 = (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_\ell}) \wedge (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}), \end{aligned}$$

όπου το 0 συμβολίζει την μηδενική $(n+\ell)$ -μορφή στον $\mathbb{R}^n$.

Η απόδειξη είναι εύκολη από την πρόταση 2.21, 3) με επαγωγή.

2) Έστω $f_1, f_2, \dots, f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι n στο χώρο C^∞ -συναρτήσεις σε ένα ανοικτό υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$, για $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Έστω $\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p)$.

Τότε ισχύει: $\left(\sum_{i=1}^n f_i \right) \cdot \omega = \sum_{i=1}^n f_i \omega$.

3) Έστω $u, \ell \in \mathbb{N}$, $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ δύο C^∞ -συναρτήσεις στο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό.

Τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} & (f(\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n})) \wedge (g(\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_\ell})) \\ & = (f \cdot g) \cdot ((\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_\ell})) \end{aligned}$$

όπου $i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_\ell \in \mathbb{N}$ με $i_1 < i_2 < \dots < i_n$,
 $j_1 < j_2 < \dots < j_\ell$.

Στη συνέχεια με τις ενότητες $\mathcal{H}$ προτάσεις θα αποδείξουμε
 τις βασικές ιδιότητες του διαφορίσιου τελεστή d των διαφορίσιμων
 μορφών.

Πρόταση 2.28

Έστω $u \in \mathcal{H}$, $u, v \in \mathcal{H}$ με $u \wedge v \in \mathcal{H}$, $u \wedge^2, v \wedge^2 \in \mathcal{H}$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, μ μέτρο.

Έστω $\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n)_{u_1}$ με $\eta \in \prod_{p \in A} \Omega^l(\mathbb{R}^n)$.

Τότε ισχύει:

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^n (\omega \wedge (d\eta)).$$

Απόδειξη (επὶ Ω^n)

Θα αποδείξουμε αρχικά για βασικές περιπτώσεις της πρότασης
 στην οποία και θα επιχειρούμε για να δείξουμε και τις
 υπόλοιπες περιπτώσεις. 1^η περίπτωση

Υποθέτουμε ότι:

$$\omega = \omega_1 \cdot (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) \text{ και}$$

$$\eta = \eta_1 \cdot (dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) \quad \text{όπου}$$

$i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_l \in \mathbb{N}$ με $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ και
 $j_1 < j_2 < \dots < j_l$ και $i_n < j_1$, όπου $\omega_1, \eta_1 : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι

δύο C^∞ συναρτήσεις:

$$\theta_1 = (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) \wedge (dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l})$$

Θέτουμε $\theta_1 = (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) \wedge (dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l})$. Προφανώς $A_1 \cap B_1 = \emptyset$.

$A_1 = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, $B_1 = \{j_1, j_2, \dots, j_l\}$

Έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta &= (\omega_1 \cdot (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \wedge (\eta_1 \cdot (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_e})) = \\ &= (\omega_1 \eta_1) \cdot ((\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_e})) \\ &= (\omega_1 \eta_1) \cdot \theta \quad (1)\end{aligned}$$

Από την (1) έχουμε:

$$\begin{aligned}d(\omega \wedge \eta) &= d((\omega_1 \eta_1) \cdot \theta) = d(\omega_1 \eta_1) \wedge \theta \\ &= (\omega_1 d\eta_1 + \eta_1 d\omega_1) \wedge \theta = \\ &= (\eta_1 d\omega_1) \wedge \theta + (\omega_1 d\eta_1) \wedge \theta = \\ &= \eta_1 \cdot (d\omega_1 \wedge \theta) + \omega_1 \cdot (d\eta_1 \wedge \theta) \quad (2)\end{aligned}$$

Αντίστοιχα έχουμε:

$$\begin{aligned}(d\omega) \wedge \eta &= (d\omega_1 \wedge \partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \wedge (\eta_1 \cdot (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_e})) \\ &= \eta_1 \cdot ((d\omega_1 \wedge \partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_e})) \\ &= \eta_1 \cdot ((d\omega_1 \wedge ((\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n})) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_e}))) \\ &= \eta_1 \cdot (d\omega_1 \wedge \theta) \quad (3)\end{aligned}$$

Αντίστοιχα έχουμε:

$$\begin{aligned}\omega \wedge (d\eta) &= (\omega_1 \cdot (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n})) \wedge (d\eta_1 \wedge \partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_e}) \\ &= \omega_1 \cdot ((\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \wedge (d\eta_1 \wedge \partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_e})) \\ &= \omega_1 \cdot ((\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \wedge (d\eta_1)) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_e}) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \omega_1 \cdot ((-1)^u ((\partial u_1) \wedge (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u})) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_\ell})) \\
 &= (-1)^u \omega_1 \cdot (\partial u_1 \wedge (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u}) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_\ell})) \\
 &= (-1)^u \omega_1 \cdot ((\partial u_1) \wedge \theta) = (-1)^u \cdot (\omega_1 \cdot ((\partial u_1) \wedge \theta)) \quad (4)
 \end{aligned}$$

Από την (4) έχουμε: (συνδυάζοντας με την (-1)^u)

$$(-1)^u \cdot (\omega \wedge (\partial u)) = \omega_1 \cdot ((\partial u_1) \wedge \theta) \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας από τις (3) και (5) στην (2) παίρνουμε ότι:

$$\partial(\omega \wedge u) = (\partial \omega) \wedge u + (-1)^u \cdot (\omega \wedge (\partial u)), \text{ δηλαδή το}$$

σημείο μέσο για αυτή την περίπτωση.

Αυτή η περίπτωση, όπου $i_u < j_1$ είναι η βασική περίπτωση που πρέπει αποδείξουμε και την οποία θα βασιστούμε για να δείξουμε και τις υπόλοιπες. 2^η περίπτωση

Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει: $\boxed{j_1 < i_u}$ και $\left(\{i_1, i_2, \dots, i_u\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_\ell\} = \emptyset \right)$

Από το λήμμα 2.26 υπάρχει $\lambda \in \{1, -1\}$ ώστε να ισχύει:

$$\begin{aligned}
 &(\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u}) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_\ell}) = \\
 &= \lambda \cdot (\partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{u+\ell}}) \text{ όπου } v_1, v_2, \dots, v_{u+\ell} \text{ είναι}
 \end{aligned}$$

οι μοναδικά ορισμένοι φυσικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$v_p < v_{p+1}$ για κάθε $p = 1, 2, \dots, u+\ell-1$ και

$$\{v_1, v_2, \dots, v_{u+\ell}\} = \{i_1, i_2, \dots, i_u, j_1, j_2, \dots, j_\ell\}$$

Θέτουμε τώρα: $\theta' = \partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{u+l}}$
 $\omega' = \omega_1 \cdot (\partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_u})$ και
 $\eta' = \eta_1 \cdot (\partial x^{v_{u+1}} \wedge \partial x^{v_{u+2}} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{u+l}})$

Έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= (\omega_1 (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u})) \wedge (\eta_1 (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_l})) \\ &= (\omega_1 \eta_1) \cdot ((\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u}) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_l})) \\ &= (\omega_1 \eta_1) \cdot (\lambda \theta') = \lambda \cdot ((\omega_1 \eta_1) \cdot \theta') = \\ &= \lambda \cdot ((\omega_1 \eta_1) \cdot (\partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_u}) \wedge (\partial x^{v_{u+1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{u+l}})) \\ &= \lambda \cdot (\omega_1 \cdot (\partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_u}) \wedge (\eta_1 \cdot (\partial x^{v_{u+1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{u+l}}))) \\ &= \lambda \cdot (\omega' \wedge \eta') \quad (6). \end{aligned}$$

Τώρα όμως η διαφορική μορφή $\omega' \wedge \eta'$ έχει την μορφή της περίπτωσης που μόλις αποδείξαμε. Εφαρμόζουμε λοιπόν αυτή την περίπτωση και στο (6) έχουμε:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(\lambda \cdot (\omega' \wedge \eta')) = \lambda d(\omega' \wedge \eta') = \\ &= \lambda \cdot ((d\omega') \wedge \eta' + (-1)^u (\omega' \wedge (d\eta'))) \quad (7). \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα:

$$\begin{aligned}
 (\partial \omega) \wedge \eta &= (\partial \omega_1 \wedge \partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \wedge (\eta_1 \wedge \partial x^{j_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_e}) \\
 &= \eta_1 \cdot ((\partial \omega_1 \wedge \partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_e})) \\
 &= (\eta_1 \cdot \partial \omega_1) \wedge ((\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_e})) \\
 &= (\eta_1 \cdot \partial \omega_1) \wedge (\lambda \cdot \theta') = ((\lambda \eta_1) \wedge (\partial \omega_1) \wedge \theta') = \\
 &= (\lambda \eta_1) \cdot ((\partial \omega_1) \wedge (\partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{n+e}})) = \\
 &= (\lambda \eta_1) \cdot ((\partial \omega_1) \wedge ((\partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_n}) \wedge (\partial x^{v_{n+1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{n+e}}))) \\
 &= (\lambda \eta_1) \cdot ((\partial \omega_1) \wedge (\partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_n})) \wedge (\partial x^{v_{n+1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{n+e}}) \\
 &= (\lambda \eta_1) \cdot ((\partial \omega_1) \wedge (\partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_n})) \wedge (\partial x^{v_{n+1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{n+e}}) \\
 &= \lambda \cdot (((\partial \omega_1) \wedge \partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_n}) \wedge (\eta_1 \cdot (\partial x^{v_{n+1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{n+e}}))) \\
 &= \lambda \cdot ((\partial \omega') \wedge \eta') \quad (\sharp)
 \end{aligned}$$

Αντίφα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
 \omega \wedge (\partial \eta) &= (\omega_1 \wedge (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n})) \wedge ((\partial \eta_1) \wedge \partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_e}) \\
 &= \omega_1 \cdot ((\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \wedge ((\partial \eta_1) \wedge \partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_e})) = \\
 &= \omega_1 \cdot ((\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \wedge (-1)^e (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_e}) \wedge (\partial \eta_1)) \\
 &= \omega_1 \cdot (-1)^e \cdot ((\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \wedge ((\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_e}) \wedge (\partial \eta_1))) \\
 &= \omega_1 \cdot (-1)^e \cdot (((\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_e})) \wedge (\partial \eta_1)) = \\
 &= (-1)^e \omega_1 \cdot ((\partial \theta') \wedge (\partial \eta_1)) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-1)^l \omega \wedge (\star' \wedge (\partial u_1)) &= \\
&= \lambda (-1)^l \omega_1 \cdot ((\partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{n+l}}) \wedge (\partial u_1)) = \\
&= \lambda (-1)^l \omega_1 \cdot (((\partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_n}) \wedge (\partial x^{v_{n+1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{n+l}})) \wedge (\partial u_1)) \\
&= \lambda (-1)^l \omega_1 \cdot ((\partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_n}) \wedge ((\partial x^{v_{n+1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{n+l}}) \wedge (\partial u_1))) \\
&= \lambda (-1)^l \omega_1 \cdot ((\partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_n}) \wedge ((-1)^l (\partial u_1) \wedge \partial x^{v_{n+1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{n+l}})) \\
&= \lambda (-1)^l \omega_1 \cdot ((\partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_n}) \wedge ((-1)^l (\partial u_1) \wedge \partial x^{v_{n+1}} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_{n+l}})) \\
&= \lambda (-1)^l \omega_1 \cdot ((\partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_n}) \wedge (\partial u_1')) = \\
&= \lambda \cdot (\omega_1 \wedge \partial x^{v_1} \wedge \partial x^{v_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{v_n}) \wedge (\partial u_1') = \\
&= \lambda \cdot (\omega' \wedge \partial u_1') \quad (9).
\end{aligned}$$

Πολλοί αναγνώστες θα 2 ήξεραν πως /9) και (-1)^l ω₁ έχουμε:

$$(-1)^l (\omega \wedge (\partial u_1)) = (-1)^l \lambda \cdot (\omega' \wedge (\partial u_1')) \quad (10)$$

Προσθέτουμε τώρα τις (8) και (10) και θα ήξεραν και να πάρουμε:

$$(\partial \omega) \wedge u + (-1)^l (\omega \wedge (\partial u_1)) = \lambda \cdot ((\partial \omega') \wedge u) + (-1)^l \lambda (\omega' \wedge (\partial u_1')) \quad (11)$$

Από τις (7) και (11) παίρνουμε:

$$\partial(\omega \wedge u) = (\partial \omega) \wedge u + (-1)^l (\omega \wedge (\partial u_1)) \quad \text{δηλαδή}$$

το ζητούμενο ότι αυτή η σχέση ισχύει.

Θέτουμε τώρα:

$$A_1 = \{i_1, i_2, \dots, i_4\} \text{ και } B_1 = \{j_1, j_2, \dots, j_4\}.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι: $A_1 \cap B_1 \neq \emptyset$. 3^η περίπτωση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= (\omega_1 \partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_4}) \wedge (n_1 \cdot (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_4})) \\ &= (\omega_1 n_1) \cdot ((\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_4}) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_4})) \\ &= (\omega_1 n_1) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Άρα $d(\omega \wedge \eta) = d(0) = 0$ (γιατί η d είναι γραμμική). (12)

Ακόμα έχουμε:

$$\begin{aligned} (d\omega) \wedge \eta &= (d\omega_1) \wedge \partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_4} \wedge (n_1 \cdot (\partial x^{j_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_4})) \\ &= n_1 \cdot ((d\omega_1) \wedge \partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_4}) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_4}) \\ &= n_1 \cdot ((d\omega_1) \wedge ((\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_4}) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_4}))) = \\ &= n_1 \cdot ((d\omega_1) \wedge 0) = n_1 \cdot 0 = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

Ακόμα έχουμε:

$$\begin{aligned} \omega \wedge (d\eta) &= (\omega_1 (\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_4})) \wedge (d\eta_1 \wedge \partial x^{j_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_4}) = \\ &= \omega_1 \cdot ((\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_4}) \wedge (-1)^l (\partial x^{j_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_4}) \wedge (d\eta_1)) = \\ &= (-1)^l \omega_1 \cdot (((\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_4}) \wedge (\partial x^{j_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_4})) \wedge (d\eta_1)) \\ &= (-1)^l \omega_1 \cdot (0 \wedge d\eta_1) = (-1)^l \omega_1 \cdot 0 = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

Από τις (12) (13) και (14) έχουμε:

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k (\omega \wedge d\eta) = 0 \text{ σε αυτή την περίπτωση.}$$

Από τα παραπάνω τώρα δείξαμε ότι αν

$$\omega = \omega_1 (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_k}) \text{ και}$$

$$\eta = \eta_1 (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_l}) \text{ όπου } \eta_1, \omega_1 \in C^\infty(A)$$

$$i_1 < i_2 < \dots < i_k \text{ και } j_1 < j_2 < \dots < j_l \in \mathbb{N}, \text{ τότε έχουμε}$$

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k (\omega \wedge d\eta) \text{ σε}$$

κάθε περίπτωση, από τις παραπάνω 3 περιπτώσεις.

4^η περίπτωση

Έστω ότι:

$$\omega = \omega_1 (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_k}),$$

$$\omega' = \omega'_1 (\partial x^{i'_1} \wedge \partial x^{i'_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i'_k}) \text{ και}$$

$$\eta = \eta_1 (\partial x^{j_1} \wedge \partial x^{j_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_l}), \text{ θέτουμε}$$

$$\omega'' = \omega + \omega', \text{ όπου } \omega, \omega' \in \bigoplus_{p \in A} \Omega^k(\mathbb{R}^n_p) \text{ και}$$

$$\eta \in \bigoplus_{p \in A} \Omega^l(\mathbb{R}^n_p), \text{ με } i_1 < i_2 < \dots < i_k, i'_1 < i'_2 < \dots < i'_k,$$

$j_1 < j_2 < \dots < j_l$. Θα δείξουμε το αποτέλεσμα για

τις ω'' και η . Προφανώς $\omega'' \in \bigoplus_{p \in A} \Omega^k(\mathbb{R}^n_p)$ αφού όπως

έχουμε από το σύνολο είναι διανυσματικός χώρος.

Από τις προηγούμενες 3 περιπτώσεις έχουμε:

$$\partial(\omega \wedge \eta) = (\partial\omega) \wedge \eta + (-1)^n (\omega \wedge (\partial\eta)) \quad (1) \text{ και}$$

$$\partial(\omega' \wedge \eta) = (\partial\omega') \wedge \eta + (-1)^n (\omega' \wedge (\partial\eta)) \quad (2).$$

Έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned} \partial(\omega + \omega' \wedge \eta) &= \partial((\omega \wedge \eta) + (\omega' \wedge \eta)) = \\ &= \partial(\omega \wedge \eta) + \partial(\omega' \wedge \eta) = \\ &= ((\partial\omega) \wedge \eta + (-1)^n (\omega \wedge (\partial\eta))) + \\ &+ ((\partial\omega') \wedge \eta + (-1)^n (\omega' \wedge (\partial\eta))) = \\ &= ((\partial\omega) \wedge \eta + (\partial\omega') \wedge \eta) + (-1)^n (\omega \wedge (\partial\eta) + \omega' \wedge (\partial\eta)) = \\ &= ((\partial\omega) + (\partial\omega')) \wedge \eta + (-1)^n ((\omega + \omega') \wedge (\partial\eta)) = \\ &= \partial(\omega + \omega') \wedge \eta + (-1)^n ((\omega + \omega') \wedge (\partial\eta)) \quad (3) \end{aligned}$$

Η (3) επιβεβαιώνει την 1η της περίπτωσης 4.

S^n περίπτωση

$$\text{Έστω ότι } \omega = \omega_1 \cdot (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}),$$

$$\eta = \eta_1 \cdot (dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_n}),$$

$$\eta' = \eta'_1 \cdot (dx^{j'_1} \wedge dx^{j'_2} \wedge \dots \wedge dx^{j'_n}), \text{ όπου}$$

$$\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n_p), \quad \eta, \eta' \in \prod_{p \in A} \Omega^l(\mathbb{R}^n_p),$$

$i_1 < i_2 < \dots < i_n, j_1 < j_2 < \dots < j_e, j'_1 < j'_2 < \dots < j'_e.$

Θέτουμε $n'' = n + n'.$

Θα δείξουμε το αποτέλεσμα για τις ω και $n''.$

Από τις περιπτώσεις 1, 2 και 3 ορίζουμε:

$$\partial (\omega \wedge n) = (\partial \omega) \wedge n + (-1)^n (\omega \wedge \partial n) \quad (1) \text{ και}$$

$$\partial (\omega \wedge n') = (\partial \omega) \wedge n' + (-1)^{n'} (\omega \wedge \partial n') \quad (2).$$

Έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned} \partial (\omega \wedge n'') &= \partial (\omega \wedge (n + n')) = \partial (\omega \wedge n + \omega \wedge n') = \\ &= \partial (\omega \wedge n) + \partial (\omega \wedge n') = \\ &= ((\partial \omega) \wedge n + (-1)^n (\omega \wedge \partial n)) + \\ &+ ((\partial \omega) \wedge n' + (-1)^{n'} (\omega \wedge \partial n')) = \\ &= ((\partial \omega) \wedge n + (\partial \omega) \wedge n') + \\ &+ (-1)^n (\omega \wedge \partial n + \omega \wedge \partial n') = \\ &= (\partial \omega) \wedge (n + n') + (-1)^n (\omega \wedge (\partial n + \partial n')) = \\ &= (\partial \omega) \wedge n'' + (-1)^n (\omega \wedge \partial (n + n')) = \\ &= (\partial \omega) \wedge n'' + (-1)^n (\omega \wedge \partial n'') \quad (3) \end{aligned}$$

Η (3) μας επιβεβαιώνει την ισχύ της περίπτωσης 5.

Μπορούμε να αποδείξουμε την περιήτηση 5 εναρξίζοντας, στην περιήτηση 4. Ας δούμε πώς.

Εντάξει, τότε τους ρόλους των ω και u στην περιήτηση 4 έχουμε:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge u'') &= d((-1)^{u \cdot l}(u'' \wedge \omega)) = \\ &= (-1)^{u \cdot l} d(u'' \wedge \omega) = \\ &= (-1)^{u \cdot l} (du'' \wedge \omega + (-1)^l (u'' \wedge d\omega)) \\ &= (-1)^{u \cdot l} ((-1)^{(l+1)u} (\omega \wedge du'') + (-1)^l ((-1)^{l(u+1)} (d\omega) \wedge u'')) \\ &= (-1)^{u \cdot l + (l+1)u} (\omega \wedge du'') + (-1)^{u \cdot l + l + l(u+1)} (d\omega) \wedge u'' = \\ &= (d\omega) \wedge u'' + (-1)^u (\omega \wedge du''), \text{ δηλαδή ισχύει η} \\ &\text{περιήτηση 5.} \end{aligned}$$

Περιήτηση 6

Εστω $w^v = w_1^v \cdot (dx^{i_1^v} \wedge dx^{i_2^v} \wedge \dots \wedge dx^{i_{m^v}^v})$ για $v=1, 2, \dots, m$, για κάποιους $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ και $m_1 = m_1 \cdot (dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l})$, όπου u, l όπως στην ηρώτηση, $i_1^v < i_2^v < \dots < i_{m^v}^v$ για κάθε $v=1, 2, \dots, m$, $j_1 < j_2 < \dots < j_l$, $w^v \in \prod_{r \in A} \mathcal{Z}^l(\mathbb{R}^n_r)$ για κάθε $v=1, 2, \dots, m$, $u \in \prod_{r \in A} \mathcal{Z}^l(\mathbb{R}^n_r)$.

(26)

Από την περιήλωση 1, 2, 4, 3 έχουμε ότι:

$$d(\omega^v \wedge \eta) = (d\omega^v) \wedge \eta + F_1^v \cdot (\omega^v \wedge (d\eta)) \text{ για κάθε } v=1, 2, \dots, m. (1)$$

Θέτουμε $\omega_0 = \omega^1 + \omega^2 + \dots + \omega^m$. Θα δείξουμε το

αποτέλεσμα για την ω_0 και την η .

Με επαγωγή. Για $m=2$ είναι η περιήλωση 4.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Θα

δείξουμε ότι ισχύει και για το $m+1$.

Υποθέτουμε ότι έχουμε τα $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^m$ όπως προκύπτει
και την $\omega^{m+1} = \omega_1^{m+1} \cdot (dx^{i_1^{m+1}} \wedge dx^{i_2^{m+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_{m+1}^{m+1}})$.

Θέτουμε $\omega_0' = \omega^1 + \omega^2 + \dots + \omega^m + \omega^{m+1}$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} d(\omega_0' \wedge \eta) &= d\left(\sum_{v=1}^{m+1} \omega^v \wedge \eta\right) = \\ &= d\left(\left(\sum_{v=1}^m \omega^v\right) + \omega^{m+1}\right) \wedge \eta \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{v=1}^m \omega^v\right) \wedge \eta + \omega^{m+1} \wedge \eta$$

Αφού το αποτέλεσμα ισχύει για τα $\sum_{v=1}^m \omega^v$ και η
από το επαγωγικό βήμα και για το ω^{m+1} και η
από την υποθέση, έπεται από την περιήλωση 4 ότι
ισχύει και για τη $\left(\sum_{v=1}^m \omega^v\right) + \omega^{m+1}$ και η, δηλαδή για
την ω_0' και η και έδειξαν επαγωγικά το αποτέλεσμα.

Περὶ ἰσχύος 7

Ἐστω $\omega = \omega_1 \cdot (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_m})$,
 $\eta^v = \eta_1^v \cdot (\partial x^{j_1^v} \wedge \partial x^{j_2^v} \wedge \dots \wedge \partial x^{j_{\ell}^v})$ γὰρ $v=1,2,\dots,m$, γὰρ
 $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$, ὅπου $\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^m(\mathbb{R}^n_p)$ καὶ

$\eta^v \in \prod_{p \in A} \Omega^{\ell}(\mathbb{R}^n_p)$ γὰρ καὶ ὅτι $v=1,2,\dots,m$, ὅπου
 $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ καὶ $j_1^v < j_2^v < \dots < j_{\ell}^v$ γὰρ καὶ ὅτι

$v=1,2,\dots,m$. Ἀποδείκνυται ὁ ἀρρήτους ἡ ἐκ τῶν περὶ ἰσχύος
6, ὅτι ἐκ τῶν περὶ ἰσχύος 5, ἐκ τῶν περὶ ἰσχύος
7 καὶ ω καὶ $\sum_{v=1}^m \eta^v$.

Συμπεραίνουμε ὅτι ὁ περὶ ἰσχύος 4 καὶ 6 ἀποδεικνύεται
5 καὶ 7 ὅτι ἡ ἀποδείξεις καὶ συμπεραίνουμε καὶ ὅτι ἀποδεικνύεται
ἐκ τῶν περὶ ἰσχύος.

Περὶ ἰσχύος 8

Γενικὴ περὶ ἰσχύος

Μετὰ ἀπὸ τὴν προηγουμένην 7 περὶ ἰσχύος ἐκ τῶν περὶ
ἰσχύος 6 καὶ 7 ἀποδεικνύουμε τὴν γενικὴν περὶ ἰσχύος.
Ἐστω ἁπλοῦς δισκός $\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^m(\mathbb{R}^n_p)$ καὶ

$\eta \in \prod_{p \in A} \Omega^{\ell}(\mathbb{R}^n_p)$.

Αφού $\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^4(\mathbb{P}_p^n)$ υπάρχουν C^∞ -συναρτήσεις

$\omega_{i_1, i_2, \dots, i_4} : A \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_4) \in (T_n^4)^*$ μοναδικά ορισμένες ώστε να ισχύει:

$$\omega = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_4) \in (T_n^4)^*} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_4} \cdot (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_4}).$$

Παρόμοια αφού $\eta \in \prod_{p \in A} \Omega^l(\mathbb{P}_p^n)$ υπάρχουν μοναδικά ορισμένες

C^∞ -συναρτήσεις $\eta_{j_1, j_2, \dots, j_l} : A \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $(j_1, j_2, \dots, j_l) \in (T_n^l)^*$ ώστε να ισχύει:

$$\eta = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_l) \in (T_n^l)^*} \eta_{j_1, j_2, \dots, j_l} \cdot (dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l})$$

Θέτουμε: $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_4} = \omega_{i_1, i_2, \dots, i_4} \cdot (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_4})$ για
κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_4) \in (T_n^4)^*$ και

$$\eta_{j_1, j_2, \dots, j_l} = \eta_{j_1, j_2, \dots, j_l} \cdot (dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) \text{ για}$$

κάθε $(j_1, j_2, \dots, j_l) \in (T_n^l)^*$

Ας επιθεωρήσουμε τώρα $(j_1^0, j_2^0, \dots, j_l^0) \in (T_n^l)^*$
Τότε το αντιστοιχείσας ισχύει για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_4) \in (T_n^4)^*$
 $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_4}$ και $\eta_{j_1^0, j_2^0, \dots, j_l^0}$ για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_4) \in (T_n^4)^*$
από τη ορισμένες 1, 2 και 3.

Αρα από την περίπτωση β) το αποτέλεσμα ισχύει για το γεωδείο: $\omega = \sum (i_1, i_2, \dots, i_n) e(T_n^4)^*$ και $n^{j_1, j_2, \dots, j_e}$.

Παρόμοια έπεται ότι το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε γεωδείο της μορφής

ω και $n^{j_1, j_2, \dots, j_e}$ για κάθε $(j_1, j_2, \dots, j_e) \in (T_n^e)^*$.

Αρα από την περίπτωση γ) το αποτέλεσμα ισχύει και για το γεωδείο ω και $\sum n^{j_1, j_2, \dots, j_e} (j_1, j_2, \dots, j_e) \in (T_n^e)^* = n$ πράγμα

που αποδεικνύει την γενική περίπτωση. ■

Η πρόταση 2.28 που μόλις αποδείξαμε θα μας χρειαστεί για να αποδείξουμε τις επόμενες σημαντικές ιδιότητες του διαφορικού τελεστή d των διαφορικών μορφών.

Πρόταση 2.29

Έστω ω να είναι μια k -διαφορική μορφή ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Ισχύει τότε ότι: $d(d\omega) = 0$ ή βωονηιγί

$$d^2(\omega) = 0.$$

Απόδειξη (εμτός όλης)

Ηγί, εδώ θα δείξουμε την πρόταση δείχνοντας
υπόλοιπες περιπτώσεις ξεχωριστά.

Εδώ η βασική περίπτωση είναι οι 0-μορφές.
Έστω λοιπόν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι μια C^∞ -συνάρτηση
στο $A \subseteq \mathbb{R}^n$, όπου $A \neq \emptyset$, A ανοικτό, δηλαδή για
0-διαφορίσιμη μορφή στο A . 1^η περίπτωση

Θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 2.3 η οποία είναι
εύκολο να δούμε ότι ισχύει σε οποιοδήποτε ανοικτό
υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ θεωρώντας βάζοντας προφανώς την
την απόδειξη του 2.3, όπου αντί για το $\mathbb{R}^n$, θεωρούμε
το A).

Έχουμε λοιπόν από την πρόταση 2.3 που ισχύει
πώρα για το ανοικτό σύνολο A αντί του $\mathbb{R}^n$ έχουμε:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i \quad (1)$$

Η df τώρα είναι μια διαφορίσιμη 1-μορφή στο A ,
δηλαδή $df \in \prod_{p \in A} \mathcal{L}'(\mathbb{R}^n_p)$.

Από την γραμμικότητα του διαφορίσιμου τελεστού d
παίρνουμε από την (1)

$$d(df) = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i\right) \stackrel{131}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i\right) \quad (2).$$

Ε) ορίσµο του διαφορίσιου τελεστή d έχουµε τώρα ότι:

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx^i \quad \text{για κάθε}$$

$$i=1, 2, \dots, n \quad (3).$$

Αφού $f \in C^\infty(A)$, προφανώς και $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $\in C^\infty(A)$ για κάθε $i=1, 2, \dots, n$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^\infty(A) \quad \text{για κάθε } i=1, 2, \dots, n.$$

Πάτι από την πρόταση 2.3 εφαρµοζόµενη τώρα

στην συνάρτηση $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ για $i=1, 2, \dots, n$ παίρνουµε:

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j} dx^j =$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) dx^j \quad \text{για κάθε } i=1, 2, \dots, n \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας στο (3) στην (2) παίρνουμε:

$$d(df) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx^i \quad (5).$$

Από την (4) έχουμε: για κάθε $i=1,2,\dots,n$.

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx^i &= \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) dx^j\right) \wedge dx^i = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) \cdot dx^j\right) \wedge dx^i = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) (dx^j \wedge dx^i) \quad (6). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στο (6) στην (5) έχουμε:

$$d(df) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) (dx^j \wedge dx^i)\right) \quad (7).$$

Όμως γνωρίζουμε $dx^j \wedge dx^i = 0$ αν $j=i$ για
κάθε $i=1,2,\dots,n$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) (dx^j \wedge dx^i) = 0 \quad \text{αν } i=j \text{ για κάθε } i=1,2,\dots,n. \quad (8).$$

Έστω $i, j \in T_n$ με $i \neq j$.

Τότε
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\alpha x^i \wedge \alpha x^j) = - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\alpha x^j \wedge \alpha x^i) \quad (7)$$

Το άθροισμα στην (7) περιέχει τα άθροισματα των όρων για $i=j$ που είναι όλα 0 από την (8) και τα ζευγάρια άθροισμάτων για i, j διαφορετικού όπου υφάρτε κάποιο ζευγάρι έχει άθροισμα 0 από την (9).

Αυτό δίνει ότι: $d(df) = 0$.
Έτσι δείξαμε την βασική πρώτη περίπτωση όπου η διαφορική μορφή είναι μια 0-μορφή.

2^η περίπτωση

Έστω $\omega = f \alpha x^i$ για κάποιο $i \in T_n$ όπου η

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια C^∞ -συνάρτηση.

Εξ' ορισμού έχουμε:

$$d\omega = df \wedge \alpha x^i \quad (10)$$

Για αυτή την περίπτωση αλλοίως για άλλες που θα δείξουμε ότι βωέχεια θα βεβαιωθείτε στην ενότητα παρατηρήσει.

Έστω ω_1, ω_2 να είναι δύο διαφορικές μορφές στο A για τις οποίες ισχύει ότι: $d^2(\omega_1) = d^2(\omega_2) = 0$. Τότε ισχύει ότι: $d^2(\omega_1 \wedge \omega_2) = 0$. Υποθέτουμε ότι η ω_1 είναι k -μορφή και η ω_2 είναι l -μορφή για $1 \leq k, l$; $k+l \leq n$

Θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 2.28.

Έχουμε:

$$\partial(\omega_1 \wedge \omega_2) = \partial\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^4(\omega_1 \wedge \partial\omega_2) \quad (11)$$

Από την (11) έχουμε:

$$\begin{aligned} \partial^2(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \partial(\partial(\omega_1 \wedge \omega_2)) = \\ &= \partial(\partial\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^4(\omega_1 \wedge \partial\omega_2)) = \\ &= \partial(\partial\omega_1 \wedge \omega_2) + (-1)^4 \partial(\omega_1 \wedge \partial\omega_2) \quad \text{πρόταση 2.28} \\ &= \partial(\partial\omega) \wedge \omega_2 + (-1)^{4+1}(\partial\omega_1 \wedge \partial\omega_2) \\ &= \partial(\partial\omega) \wedge \omega_2 + (-1)^4(\partial\omega_1 \wedge \partial\omega_2 + (-1)^4(\omega_1 \wedge \partial(\partial\omega_2))) \\ &= 0 \wedge \omega_2 + (-1)^{4+1}(\partial\omega_1 \wedge \partial\omega_2) + (-1)^4(\partial\omega_1 \wedge \partial\omega_2) \\ &+ (-1)^{24}(\omega_1 \wedge 0) = \\ &= (-1)^4(-(\partial\omega_1 \wedge \partial\omega_2) + (\partial\omega_1 \wedge \partial\omega_2)) = (-1)^4 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Έτσι δείξαμε την παρατήρηση.

Έχουμε τώρα:

$$\partial^2(\partial f) = \partial(\partial(\partial f)) = \partial(\partial^2 f) =$$

$$= \partial(0) = 0.$$

$$\text{Αντίφαση} \quad \partial(\partial x^i) = \partial^2 x^i = 0 \quad \text{και} \quad \partial^2 x^i = 0$$

$$\partial^2(\partial x^i) = \partial(\partial(\partial x^i)) = \partial(0) = 0.$$

(135)

Από τον ορισμό $d^2(df) = 0$ και $d^2(dx^i) = 0$

έπεται ότι η μορφή ω είναι κλειστή:

$$d^2(df \wedge dx^i) = 0, \text{ δηλαδή } d^2(\omega) = 0,$$

Τώρα δείχνουμε ότι $d^2(\omega) = 0$ ή, ισοδύναμα, ότι

$$d^2\omega = 0. \text{ Από τον ορισμό του } \omega \text{ (10).}$$

Από τον ορισμό (10) έχουμε:

$$\begin{aligned} d^2\omega &= d(d\omega) = d(df \wedge dx^i) = \\ &= d(df) \wedge dx^i + df \wedge d(dx^i) = \\ &= 0 \wedge dx^i + df \wedge 0 = 0 \end{aligned}$$

Αρα έχουμε $d^2(f dx^i) = 0$, για κάθε

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

3η περίπτωση

Έστω $\omega = \omega_1 \cdot (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n})$, για

$n \in \mathbb{N}$, όπου: $i_1 < i_2 < \dots < i_n$, όπου

$$\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^n(\mathbb{R}^n), \text{ θα δείξουμε } d^2(\omega) = 0$$

για

οποιαδήποτε n και $n \geq 1$. Για $n=1$ το δείχνουμε,
επειδή η περίπτωση 2.

Υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$
και θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$.

Έστω:

$$\omega = \omega_1 (\alpha x^{i_1} \wedge \alpha x^{i_2} \wedge \dots \wedge \alpha x^{i_{n+1}}) \text{ όπου}$$

$$i_1, i_2, \dots, i_{n+1}, \omega \in \prod_{p \in A} \Sigma^{n+1}(\mathbb{R}^n).$$

$$\text{Έχουμε } \omega = \omega_1 (\alpha x^{i_1} \wedge \alpha x^{i_2} \wedge \dots \wedge \alpha x^{i_n}) \wedge \alpha x^{i_{n+1}}$$

$$\text{Έχουμε } d^2 (\omega_1 (\alpha x^{i_1} \wedge \alpha x^{i_2} \wedge \dots \wedge \alpha x^{i_n})) = 0 \text{ από το}$$

$$\text{επαγωγικό βήμα και } d^2 (\alpha x^{i_{n+1}}) = d (d (\alpha x^{i_{n+1}})) = d(0) = 0.$$

Εφαρμόζουμε τώρα την παρατήρηση στην περίπτωση 2
για την περίπτωση $\omega_1 (\alpha x^{i_1} \wedge \alpha x^{i_2} \wedge \dots \wedge \alpha x^{i_n})$ και για την
 $\alpha x^{i_{n+1}}$ και παίρνουμε ότι: $d^2 \omega = 0$, δηλαδή το
αποτέλεσμα ισχύει για $n+1$. Από το αποτέλεσμα
ισχύει για κάθε $n=1, 2, \dots$ και άρα έδειχται η
περίπτωση 3.

4^η περίπτωση

Γενική περίπτωση.

$$\text{Έστω } n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \text{ και } \omega \in \prod_{p \in A} \Sigma^n(\mathbb{R}^n).$$

Τότε υπάρχουν μοναδικά ορισμένες C^∞ συναρτήσεις
 $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_n} : A \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^A)^*$ ώστε:

$$\omega = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}).$$

Θέτουμε $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n})$
 για καθε $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*$

Αρα έχουμε $\omega = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}$

Για να δείξουμε αυτή την περίπτωση δείχνουμε πρώτα
 ότι είναι ισορροπία.

Έστω $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v \in \prod_{p \in A} \Omega^4(\mathbb{R}_p^4)$, για $v \in \mathbb{N}$.

$v \geq 2$ ώστε $d^2(\omega_i) = 0$ για καθε $i=1, 2, \dots, v$.

Τότε ισχύει: $d^2(\sum_{i=1}^v \omega_i) = d^2(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_v) = 0$.

Για $v=2$ έχουμε:

$$d^2(\omega_1 + \omega_2) = d(d(\omega_1 + \omega_2)) = d(d\omega_1 + d\omega_2)$$

$$= d(d\omega_1) + d(d\omega_2) = d^2\omega_1 + d^2\omega_2 = 0$$

$$= d(d\omega_1) + d(d\omega_2) = d^2\omega_1 + d^2\omega_2 = 0, \quad v \geq 2.$$

Έστω ότι ισχύει για v κάποιον $v \in \mathbb{N}$, $v \geq 2$.

Θα το δείξουμε για $v+1$.
 Έστω λοιπόν $\omega_i \in \prod_{p \in A} \Omega^4(\mathbb{R}_p^4)$ για $i=1, 2, \dots, v+1$.

ώστε $d^2(\omega_i) = 0$ για καθε $i=1, 2, \dots, v+1$.

τότε έχουμε:

$$\partial^2 \left(\sum_{i=1}^{v+1} \omega_i \right) = \partial^2 \left(\sum_{i=1}^v \omega_i + \omega_{v+1} \right).$$

Από το επαγωγικό βήμα έχουμε ότι $\partial^2 \left(\sum_{i=1}^v \omega_i \right) = 0$
και επειδή και $\partial^2(\omega_{v+1})$ από την περίπτωση για $v=2$
για το $\sum_{i=1}^v \omega_i$ και ω_{v+1} έπεται ότι:

$$\partial^2 \left(\sum_{i=1}^{v+1} \omega_i \right) = 0.$$

Εφαρμόζουμε αυτή την παρατήρηση στο γινόμενο των
διαφορηέντων πορφόβ $\omega^{i_1, i_2, \dots, i_n}$, για όλα τα

$(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*$, αφού ισχύει ότι:

$$\partial^2(\omega^{i_1, i_2, \dots, i_n}) = 0 \text{ για κάθε } (i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*$$

από την περίπτωση 3 και άρα έπεται ότι

$$\partial^2 \left(\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^4)^*} \omega^{i_1, i_2, \dots, i_n} \right) = \partial^2(\omega) = 0 \text{ και η}$$

πρόταση έδειχθη πλήρως. ■

Η πρόταση 2.28 ισχύει για γινόμενες διαφορικές μορφές.

Με την ενόχληση πρόταση δείχνουμε ότι η πρόταση 2.28 ισχύει και για γινόμενες διαφορικές μορφές.

Πρόταση 2.30

Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $g: A \rightarrow \mathbb{R}$, για $A \subseteq \mathbb{R}^m$.

A ανοικτό, $A \neq \emptyset$, όπου η g είναι για C^∞ συνάρτηση.

Έστω σύνολο $\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^m(\mathbb{R}^m_p)$. Τότε ισχύει ότι:

$$d(g\omega) = (dg \wedge \omega) + (g \cdot d\omega)$$

Απόδειξη (επ' αόριστου)

Θα δείξουμε πως πρόταση διακρίνοντας περιπτώσεις όπως κάναμε στην πρόταση 2.28.

1) περίπτωση:

$\omega = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}$ για κάποια

$i_1, i_2, \dots, i_m \in \mathbb{T}_m$ με $i_1 < i_2 < \dots < i_m$.

Τότε $d(g\omega) = dg \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_m} = dg \wedge \omega$ (1).

από τον ορισμό του τελεστή d της διαφορικής μορφής $g\omega$.

Αα δείξουμε τώρα ότι $d(\omega) = 0$

$\omega = d(x^{i_1} \wedge x^{i_2} \wedge \dots \wedge x^{i_r})$. Εί' ορθεμόν έχομε

(από τον ορθεμόν του διαφορικού για διαφορικών μορφών)

$$d(x^{i_1} \wedge x^{i_2} \wedge \dots \wedge x^{i_r}) = d(\omega) = \\ = d(1 \wedge x^{i_1} \wedge x^{i_2} \wedge \dots \wedge x^{i_r}) = 0$$

II) Είναι η συνάρτηση $\omega: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $\omega(x) = 1$ για $x \in A$. Αφού η ω είναι βγαθέρη συνάρτηση έχομε (από τον ορθεμόν III) ότι

$$d(\omega) = 0 \text{ για κάθε } p \in A, \text{ όπου } 0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Είναι η μηδενική γραμμική συνάρτηση με

$$0(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Αρα } d(\omega)(p)(u_p) = d(\omega)(p)(u) = 0(u) = 0$$

$$\text{για κάθε } u_p \in \mathbb{R}^n_p. \text{ Αρα } d(\omega) = 0: \mathbb{R}^n_p \rightarrow \mathbb{R}$$

δηλαδή η μηδενική συνάρτηση για κάθε $p \in A$, δηλαδή

$$d\omega = 0. \text{ Αρα } d(x^{i_1} \wedge \dots \wedge x^{i_r}) = 0$$

Αρα $d\omega = 0$ και άρα $g \cdot d\omega = 0$. Αρα

από 74(1) και (2) έπεται ότι:

$d(g\omega) = dg \wedge \omega + g \cdot d\omega$, δηλαδή η ισχύς της
πρότασης σε αυτή την περίπτωση.

2^o περίπτωση

Έστω ότι $\omega = h \cdot dx^i$ για κάποιο $i \in \mathbb{T}_m$, όπου

$h: A \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι μία C^∞ -συνάρτηση, δηλαδή:

$$\omega \in \prod_{p \in A}^\infty \Omega^1(\mathbb{R}_p^m) = \prod_{p \in A}^\infty \mathcal{T}'(\mathbb{R}_p^m).$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} d(g\omega) &= d(g \cdot (h dx^i)) = d(g \cdot h) \wedge dx^i = \\ &= d(gh) \wedge dx^i = (dg) \cdot h + g \cdot dh \wedge dx^i = \\ &= (h \cdot dg) \wedge dx^i + (g \cdot dh) \wedge dx^i = \\ &= h \cdot (dg \wedge dx^i) + g \cdot (dh \wedge dx^i) \quad (1) \end{aligned}$$

Έχουμε: ακόμη:

$$\begin{aligned} (dg \wedge \omega) + (g \cdot d\omega) &= dg \wedge (h \cdot dx^i) + g \cdot (dh \wedge dx^i) \\ &= h \cdot (dg \wedge dx^i) + g \cdot (dh \wedge dx^i) \quad (2) \end{aligned}$$

(142)

Άρα ισχύει το ζητούμενο και στην περίπτωση αυτή.

3^η περίπτωση

Υποθέτουμε ότι:

$$\omega = h \cdot (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) \quad , \omega \in \prod_{p \in A}^{\infty} \Omega^u(\mathbb{R}^m)$$

για $n \in \mathbb{N}$, $u \leq m$

Θα το δείξουμε επαγωγικά. Για $n=1$ το δείχνει, είναι η περίπτωση 2.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για n , δείχνουμε για $n+1$.
Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$.

$$\text{Θέτουμε: } \omega_1 = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$$

$$\text{Έχουμε: για } \omega = h \cdot (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n+1}}) = h(\omega_1 \wedge dx^{i_{n+1}})$$

$$\begin{aligned} d(g\omega) &= d(g \cdot (h \cdot (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n+1}}))) \\ &= d((gh) \cdot (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n+1}})) = \end{aligned}$$

$$= (d(gh) \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_{n+1}}) =$$

$$= (d(gh) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}) \wedge dx^{i_{n+1}} =$$

$$= d((gh) \cdot (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n})) \wedge dx^{i_{n+1}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= d(g \cdot (h(\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_r}))) \wedge \partial x^{i_{r+1}} = \\
 &= d(g \cdot \omega_1) \wedge \partial x^{i_{r+1}} = ((dg \wedge \omega_1) + g \cdot d\omega_1) \wedge \partial x^{i_{r+1}} \\
 &= (dg \wedge \omega_1) \wedge \partial x^{i_{r+1}} + (g \cdot d\omega_1) \wedge \partial x^{i_{r+1}} = \\
 &= (dg \wedge (h \cdot \partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_r})) \wedge \partial x^{i_{r+1}} + \\
 &+ g \cdot (d(h \cdot \partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_r})) \wedge \partial x^{i_{r+1}} \quad (*) \\
 &= dg \wedge ((h \cdot \partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_r}) \wedge \partial x^{i_{r+1}}) + \\
 &+ g \cdot ((d h \wedge \partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_r}) \wedge \partial x^{i_{r+1}}) = \\
 &= dg \wedge (h \cdot (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_{r+1}})) \\
 &+ g \cdot (dh \wedge \partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_{r+1}}) = \\
 &= dg \wedge \omega + g \cdot d\omega, \text{ δηλαδή } \quad \omega \text{ και } d\omega \text{ ανήκουν στην}
 \end{aligned}$$

οερίστησής τους.

Δείχνουμε τώρα τον ελάχιστο ισχυρισμό

Ισχυρισμός 1

144

Υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για τις διαφορίσιμες μορφές $\omega_1 = g\omega_2$ και $\omega_3 = g\omega_4$, $\omega_2 + \omega_4$ δόνου $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^∞ αναμεταίεστη για $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\omega_2, \omega_4 \in \prod_{p \in A} \Omega^k(\mathbb{R}^n_p)$. Θα δείξουμε ότι $p \in A$

το αποτέλεσμα ισχύει και για την διαφορίσιμη μορφή

$$\omega_1 + \omega_3 = g(\omega_2 + \omega_4) = g \cdot \omega_5$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} d(g \cdot (\omega_2 + \omega_4)) &= d(g\omega_2 + g\omega_4) = \\ &= d(g\omega_2) + d(g\omega_4) = \\ &= (dg \wedge \omega_2 + g \wedge d\omega_2) + (dg \wedge \omega_4 + g \wedge d\omega_4) = \\ &= (dg \wedge (\omega_2 + \omega_4)) + (g \wedge (d\omega_2 + d\omega_4)) = \\ &= dg \wedge (\omega_2 + \omega_4) + g \wedge d(\omega_2 + \omega_4) = \\ &= dg \wedge \omega_5 + g \wedge d\omega_5. \end{aligned}$$

Άρα το αποτέλεσμα ισχύει για την διαφορίσιμη μορφή $g \cdot \omega_5$.

145

Με βάση τον ισχυρισμό 1 δείχνουμε τώρα τον ισχυρισμό 2.

Ισχυρισμός 2

Υποθέτουμε ότι το αντιστερόμα ισχύει για τις διαφορικές μορφές $g_1, g_2, \dots, g_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, όπου

$g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι για C^∞ συνάρτηση και

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in \prod_{p \in A} \Omega^1(\mathbb{R}^m_p)$. Τότε το αντιστερόμα

ισχύει και για την διαφορική μορφή

$g(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)$. Θα το δείξουμε επαγωγικά.

Υποθέτουμε ότι το αντιστερόμα ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ και θα δείξουμε ότι το αντιστερόμα

ισχύει και για $n+1$.

Έστω λοιπόν $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι για C^∞ συνάρτηση και $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+1} \in \prod_{p \in A} \Omega^1(\mathbb{R}^m_p)$ ώστε το αντιστερόμα

να ισχύει για κάθε μία από τις $g\omega_i$, για $i=1, 2, \dots, n+1$. Θα δείξουμε ότι το αντιστερόμα ισχύει και για την $g(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n+1})$.

(146)

Από το προηγούμενο βήμα έπεται ότι το αποτέλεσμα ισχύει και για την διαφορική μορφή $g(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)$.

Έχουμε λοιπόν:

$$\partial (g(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n+1})) =$$

$$\partial (g(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) + g\omega_{n+1}) =$$

$$= \partial (g(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)) + \partial (g\omega_{n+1}) =$$

$$= (\partial g \wedge (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) + g \cdot \partial (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n))$$

$$+ \partial g \wedge \omega_{n+1} + g \cdot \partial \omega_{n+1} =$$

$$= \partial g \wedge (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n + \omega_{n+1}) + g \cdot (\partial (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) + \partial \omega_{n+1})$$

$$= \partial g \wedge (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n+1}) + g \cdot (\partial (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n+1})).$$

Ενδεχόν το προκύψαν ισχύει για την διαφορική μορφή $g(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n+1})$ και έτσι αποδεικνύεται ο

ισχυρισμός 2 επαγωγικά. Φυσικά ο ισχυρισμός 2

υπερβαίνει τον ισχυρισμό 1 και θα μπορούσαμε να την

αναφέρουμε τον ισχυρισμό 1.

Περίπτωση 4

Γενική μορφή:

Έστω $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι για C^∞ συνάρτηση και
 $\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^u(\mathbb{R}_{p,p}^u)$.

$p \in A$

Τότε υπάρχουν μοναδικά ορισμένες συναρτήσεις C^∞
 $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}: A \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^u)^*$,
 έτσι ώστε να ισχύει:

$$\omega = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^u)^*} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n} (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}).$$

Παρατήρηση: $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n} (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n})$
 για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^u)^*$.

Από την περίπτωση 3) το αποτέλεσμα ισχύει για
 κάθε διαφορική μορφή $g \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ για κάθε
 $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n^u)^*$ και από τον ισχυρισμό 2 της

περίπτωσης 2 έπεται τελικά ότι το αποτέλεσμα
 ισχύει για την διαφορική μορφή:

(248)

$$g\left(\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_n)^*} \omega^{i_1, i_2, \dots, i_n}\right) = g \cdot \omega \text{ και το αποτέλεσμα}$$

εδείχθη όπως ■

Η επόμενη πρόταση μας παρέχει μια αδόξα θεμελιώδη ιδιότητα του διαφορικού τελεστή d των διαφορικων μορφών, η οποία βασίζεται στις προηγουμένως ιδιότητες που αποδείξαμε.

Πρόταση 2.31

Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ να είναι μια C^∞ συνάρτηση, για $n, m \in \mathbb{N}$ και έστω ω να είναι μια k -μορφή στον $\mathbb{R}^m$.

Τότε ισχύει:

$$f_{k+1}^*(d\omega) = d(f_k^*(\omega))$$

Απόδειξη (επ' ουδενός)

Θ' αποδείξουμε και αυτή την πρόταση διαμερίζοντας περιπτώσεις.

1) περίπτωση

Έστω $\omega = g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι μια 0-μορφή στον $\mathbb{R}^m$.

και εδώ διασπώμενη από τις συνιστώσες:

$$1) d\omega = x^i \text{ για κάθε } i \in T_m.$$

Έχουμε:

$$f^*(dx^i) \stackrel{\text{πρόταση 2.9}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx^j \quad (1).$$

$$\begin{aligned} d(f^*(x^i)) &= d(x^i \circ f) = d(f_i) \stackrel{\text{πρόταση 2.3}}{=} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx^j \quad (2). \end{aligned}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι: $f^*(dx^i) = d(f^*(x^i))$
για κάθε $i=1,2,\dots,m$.

Παρατηρούμε χρησιμοποιώντας το ότι: $f^*(x^i) = x^i \circ f$
(που είναι ο ορισμός της συνθέσης $\circ$ του βιβλίου

Manfredo P. do Carmo) και το ότι:

$x^i \circ f = f_i$, όπου f_i είναι οι συνιστώσες
συνιστώσες του f , δηλαδή οι $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ για
 $i=1,2,\dots,m$ όπου:

$$f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})) \text{ για } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

150

2) b) η g είναι μία συναρτησυνάρτηση C^∞ συνάρτηση.

Θα δείξουμε ότι:

$$f_1^*(dg) = d(f^*(g)) \quad //.$$

Εξ' ορισμού έχουμε:

$$d(f^*(g)) = d(g \circ f) \quad (2).$$

Έχουμε τώρα χρησιμοποιώντας των προηγούμενων
συνθημάτων 2) α).

$$f_1^*(dg) = f_1^* \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_j} dx^j \right) = \sum_{j=1}^m f_1^* \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} dx^j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ f \right) \cdot f_1^*(dx^j) =$$

$$= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ f \right) \cdot d(f(x^j)) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ f \right) \cdot d(f_j)$$

$$= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ f \right) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx^i =$$

$$= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ f \right) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) dx^i =$$

(151)

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ f \right) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) dx^i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ f \right) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) dx^i \underset{\substack{\text{η πρόταση 2.20} \\ (3)}}{=} dg \circ f$$

Από τις (1), (2) και (3) έπεται ότι:

$f_1^*(dg) = d(f_1^*(g))$, δηλαδή το συμπέρασμα για
την τυχαία διαφορίσιμη 0-μορφή g .

2^η περίπτωση

Έστω ότι: $\omega = g \cdot dx^i$, όπου: $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ να
είναι για C^∞ συνάρτηση και $i \in T_m$, και dx^i είναι
για 1-μορφή στον $\mathbb{R}^m$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} f_2^*(d\omega) &= f_2^*(d(g \cdot dx^i)) = f_2^*(dg \wedge dx^i) = \\ &= f_1^*(dg) \wedge f_1^*(dx^i) = d(f_1^*(g)) \wedge d(f_1^*(x^i)) \\ &= d(g \circ f) \wedge df_i \quad (1). \end{aligned}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} d(f_1^*(\omega)) &= d(f_1^*(g \cdot dx^i)) = \\ &= d((g \circ f) \cdot f^*(dx^i)) = d(g \circ f) \cdot df_i = \\ &= d(g \circ f) \wedge df_i + (g \circ f) \cdot d(df_i) = \\ &= d(g \circ f) \wedge df_i + (g \circ f) \cdot 0 = \\ &= d(g \circ f) \wedge df_i \quad (2) \end{aligned}$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι:

$f_2^*(d\omega) = d(f_1^*(\omega))$, δηλαδή το αποτέλεσμα για αυτές τις περιπτώσεις.

Θα δείξουμε τώρα τον ελκυσ ισχυρισμό:

Ισχυρισμός 1

Υποθέτουμε ότι η πρόταση αληθεύει για τις διαφορετικές μορφές ω_1 και ω_2 , όπου η ω_1 είναι μια l -μορφή στον $\mathbb{R}^m$ και η ω_2 είναι μια l -μορφή στον $\mathbb{R}^m$. Θα δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για τις u -μορφές $\omega_1 \wedge \omega_2$ στον $\mathbb{R}^m$, όπου $u+l \leq m$.

Exemple:

$$\begin{aligned}
 f_{n+l+1}^* (\partial (\omega_1 \wedge \omega_2)) &= \\
 &= f_{n+l+1}^* (\partial \omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^n \omega_1 \wedge \partial \omega_2) = \\
 &= f_{n+l+1}^* (\partial \omega_1 \wedge \omega_2) + f_{n+l+1}^* ((-1)^n \omega_1 \wedge \partial \omega_2) = \\
 &= (f_{n+1}^* (\partial \omega_1) \wedge f_l^* (\omega_2)) + (-1)^n (f_n^* (\omega_1) \wedge f_{l+1}^* (\partial \omega_2)) \\
 &= \partial (f_n^* (\omega_1)) \wedge f_l^* (\omega_2) + (-1)^n (f_n^* (\omega_1) \wedge \partial f_l^* (\omega_2)) \\
 &= \partial (f_n^* (\omega_1) \wedge f_l^* (\omega_2)) = \\
 &= \partial (f_{n+l}^* (\omega_1 \wedge \omega_2)), \text{ δηλαδή } \tau_0
 \end{aligned}$$

Σημείωση.

Θα εφαρμόσουμε τώρα τον ισχυρισμό 1 στην επόμενη περίπτωση 3

$$\text{Έστω } \omega = g \cdot (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) \text{ όπου}$$

$g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι μια C^∞ συνάρτηση και
 $\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n} \in \wedge^n \Omega^1(\mathbb{R}^m)$ όπου
 $i_1 < i_2 < \dots < i_n, n \in \mathbb{N}, i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}, n \leq m.$

(154)

Θα δείξουμε επαγωγικά αυτή την περιήγηση.

Για $n=1$ είναι η περιήγηση 2.

Υποθέτουμε ότι αυτή η περιήγηση αληθεύει για n άτομα $n \in \mathbb{N}$ και θα δείξουμε ότι αληθεύει και για $n+1$.

Έστω λοιπόν ότι: $\omega = g. (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_{n+1}})$

για $n \in \mathbb{N}$, $i_1, i_2, \dots, i_{n+1} \in \mathbb{N}$, $n+1 \leq m$, $i_1 < i_2 < \dots < i_{n+1}$
 ή $\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_{n+1}} \in \prod_{p \in \mathbb{N}^m} \Sigma^m(\mathbb{R}^m_p)$.

Θέτουμε $\omega_1 = g. (\partial x^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n})$ και $\omega_2 = \partial x^{i_{n+1}}$.

Από το επαγωγικό βήμα το αποτέλεσμα ισχύει για την ω_1 και από την περιήγηση 1) το αποτέλεσμα ισχύει και για την $\partial x^{i_{n+1}} \leq \omega_2$. Άρα από τον ισχυρισμό 2. το αποτέλεσμα ισχύει και για την $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2$

~~Παρατήρηση:~~

περίληψη 4 γενική περιήγηση

Έστω τώρα $\omega \in \prod_{p \in \mathbb{N}^m} \Sigma^m(\mathbb{R}^m_p)$ για n άτομα

$n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq m$. Θα δείξουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για την ω .

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει C^∞ συναρτήσεις

$\omega_{i_1, i_2, \dots, i_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_m^n)^*$,
 έτσι ώστε να ισχύει:

$$\omega = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_m^n)^*} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n} (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n}) .$$

Θέτουμε: $\omega^{i_1, i_2, \dots, i_n} = \omega_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_n})$

για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_m^n)^*$.

Έτσι έχουμε: $\omega = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_m^n)^*} \omega^{i_1, i_2, \dots, i_n}$.

Θα δείξουμε το αντιστρόφως επαγωγικά.

Έστω ότι $\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_m^n)^*} \omega^{i_1, i_2, \dots, i_n} = \sum_{i=1}^v \theta_i$, όπου

$v = \binom{m}{n}!$ και για κάθε $i \in T_v$, υπάρχει μοναδικό
 $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (T_m^n)^*$ ώστε: $\theta_i = \omega^{i_1, i_2, \dots, i_n}$ και

αν $j_1, j_2 \in T_v$ με $j_1 \neq j_2$ τότε

είναι $\theta_{j_1} = \omega^{i_1, i_2, \dots, i_n}$ και $\theta_{j_2} = \omega^{i'_1, i'_2, \dots, i'_n}$, τότε
 $(i_1, i_2, \dots, i_n) \neq (i'_1, i'_2, \dots, i'_n)$

(256)

Από την περίπτωση 3 το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε $j \in \mathbb{N}$ για την θ_j . Προφανώς ισχύει για την θ_1 .

Υποθέτουμε ότι ισχύει για την $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n-1}$ (όπου $n \geq 2$).

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για την $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n+1}$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} f_{n+1}^*(\omega) &= f_{n+1}^*(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) = \\ &= f_{n+1}^*(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n-1} + \omega_n) = \\ &= f_{n+1}^*(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n-1}) + f_{n+1}^*(\omega_n) = \\ &= \omega(f_{n+1}^*(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n-1})) + \omega(f_{n+1}^*(\omega_n)) = \\ &= \omega(f_{n+1}^*(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{n-1}) + f_{n+1}^*(\omega_n)) = \\ &= \omega(f_{n+1}^*(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)) = \omega(f_{n+1}^*(\omega)). \end{aligned}$$

Η απόδειξη τώρα ολοκληρώθηκε. ■

Για την συνέχεια θα μας χρειαστεί για ακόμη ιδιότητα βασική (που αναφέρεται στο πρόβλημα 4-13/9), βλ.δα 95, στο βιβλίο του Spivak). Για να την αποδείξουμε θα πρέπει πρώτα να αποδείξουμε δύο άλλες ιδιότητες.

↓ επόμενο βήμα

Λειτουργία (157)

Ξεκινάμε με το ενόητο λήμμα.

Λήμμα 2.32

Έστω V, W, Z να είναι τρεις αλληλοπαρα-
συμπληρωματικοί χώροι (ή συνεπώς ή άπειρος διάστασης).

Έστω $f: V \rightarrow W$ και $g: W \rightarrow Z$ να είναι
δύο γραμμικές συναρτήσεις. Τότε για κάθε $u \in V$

$$\text{ισχύει: } (g \circ f)_u^* = f_u^* \circ g_u^*$$

Απόδειξη

$$\text{Η } g_u^*: \mathcal{I}^u(Z) \rightarrow \mathcal{I}^u(W) \text{ και}$$

$$\text{η } f_u^*: \mathcal{I}^u(W) \rightarrow \mathcal{I}^u(V) \text{ . Έτσι η}$$

$$f_u^* \circ g_u^*: \mathcal{I}^u(Z) \rightarrow \mathcal{I}^u(V) \text{ .}$$

$$\text{Η } g \circ f: V \rightarrow Z \text{ και άρα η}$$

$$(g \circ f)_u^*: \mathcal{I}^u(Z) \rightarrow \mathcal{I}^u(V) \text{ .}$$

Αρα, οι συναρτήσεις $f_n^* \circ g_n^*$ και $(g \circ f)_n^*$,
έχουν τα ίδια πεδία ορισμού και τιμών και άρα
έχει νόημα να εξετάσουμε αν είναι ίσες.

Έστω λοιπόν $T \in \mathcal{T}^4(Z)$. Τότε

$$(f_n^* \circ g_n^*)(T) \in \mathcal{T}^4(V). \text{ Αρα } \circ$$

$$(f_n^* \circ g_n^*)(T), \text{ όπως και } (g \circ f)_n^*(T) : V^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι συναρτήσεις 4-αρχής (ταυοτέρ) $\mu \in \mathbb{N}$
ορισμού το V^4 και τιμές στο $\mathbb{R}$.

Έστω λοιπόν $(u_1, u_2, \dots, u_4) \in V^4$, για κάποια
 $u_1, u_2, \dots, u_4 \in V$.

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} & ((f_n^* \circ g_n^*)(T))((u_1, u_2, \dots, u_4)) = \\ & (f_n^*(g_n^*(T)))((u_1, u_2, \dots, u_4)) \quad \underline{\text{ορισμός}} \\ & (g_n^*(T))((f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_4))) \quad \underline{\text{ορισμός}} \\ & = T((g(f(u_1)), g(f(u_2)), \dots, g(f(u_4)))) = \\ & = T((g \circ f)(u_1), (g \circ f)(u_2), \dots, (g \circ f)(u_4)) // \end{aligned}$$

Απόφα έχουμε:

$$\begin{aligned} & ((g \circ f)_u)^*(T) \chi((u_1, u_2, \dots, u_n)) = \\ & T((g \circ f)(u_1), (g \circ f)(u_2), \dots, (g \circ f)(u_n)) \quad (2) \end{aligned}$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι:

$$\begin{aligned} & ((f_u^* \circ g_u^*)(T)) \chi((u_1, u_2, \dots, u_n)) = ((g \circ f)_u)^*(T) \chi((u_1, u_2, \dots, u_n)) \\ & \text{για κάθε } (u_1, u_2, \dots, u_n) \in V^n. \text{ Άρα} \end{aligned}$$

$$(f_u^* \circ g_u^*)(T) = (g \circ f)_u^*(T) \quad (3).$$

Η (3) τώρα ισχύει για κάθε $T \in \mathcal{T}^n(Z)$, οπότε/γ
 που δίνει ότι: $(g \circ f)_u^* = f_u^* \circ g_u^*$ και αυτό
 βέβαια ισχύει για κάθε $u \in \mathbb{N}$ και η ανώτερη του
 λήμματος είναι ολότελ. ■

Με την βοήθεια του παραπάνω λήμματος 2.32
 θα δείξουμε τώρα την επόμενη πρόταση

Πρόταση 2.33

Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^v$ και

είναι 2 C^∞ συναρτήσεις για $n, m, v \in \mathbb{N}$.

Να δείξετε ότι:

α) για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$ ισχύει:

$$g_{f(p)}^* \circ f_p^* = (g \circ f)_p^* \quad \text{και}$$

β) $(g \circ f)_u^* = f_u^* \circ g_u^*$ για κάθε $u \in \mathbb{R}^m$.

Απόδειξη

α) Ένα δεδομένο είναι $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Έτσι

$$f_{p_0}^*: \mathbb{R}_{p_0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{f(p_0)}^m \quad \text{και}$$

$$g_{f(p_0)}^*: \mathbb{R}_{f(p_0)}^m \rightarrow \mathbb{R}_{g(f(p_0))}^v.$$

Αρα ορίζεται η σύνθεση:

$$g_{f(p_0)}^* \circ f_{p_0}^*: \mathbb{R}_{p_0}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{(g \circ f)(p_0)}^v$$

H $g \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και γ

$$(g \circ f)_*^{p_0}: \mathbb{R}_{p_0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{(g \circ f)(p_0)}^m.$$

Αρα και οι δύο συναρτήσεις $(g \circ f)_*^{p_0}$ και

$g_*^{f(p_0)} \circ f_*^{p_0}$ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και γιγνώσκουμε ότι έχει νόημα να ελεγχόμαστε εάν αυτές οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες.

Εστω λοιπόν $u \in \mathbb{R}^n$.

Υπολογίζουμε:

$$\left((g \circ f)_*^{p_0} \right) (u_{p_0}) = \left((D(g \circ f)(p_0))(u) \right)_{(g \circ f)(p_0)} \quad (1)$$

$$\left(g_*^{f(p_0)} \circ f_*^{p_0} \right) (u_{p_0}) = g_*^{f(p_0)} \left(f_*^{p_0} (u_{p_0}) \right) =$$

$$= g_*^{f(p_0)} \left(\left((Df(p_0))(u) \right)_{f(p_0)} \right) =$$

$$= \left((Dg(f(p_0))) \left((Df(p_0))(u) \right) \right)_{g(f(p_0))} \quad (2)$$

Είναι γνωστό τώρα από τον αντιστοιχισμό ΙΙΙ ότι:

$$D(g \circ f)(p_0) = Dg(f(p_0)) \circ Df(p_0) \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας στο (3) στην (1) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} ((g \circ f)_{*}^{p_0})(u_{p_0}) &= ((Dg(f(p_0)) \circ Df(p_0))(u))_{(g \circ f)(p_0)} = \\ &= ((Dg(f(p_0)))(Df(p_0)(u)))_{(g \circ f)(p_0)} \quad (4). \end{aligned}$$

Από τις (2) και (4) παίρνουμε τώρα ότι:

$$(g \circ f)_{*}^{p_0}(u_{p_0}) = (g_{*}^{f(p_0)} \circ f_{*}^{p_0})(u_{p_0}) \quad (5).$$

Αφού η (5) ισχύει για κάθε $u_{p_0} \in T_{p_0}^u$ έπεται ότι:

$$(g \circ f)_{*}^{p_0} = g_{*}^{f(p_0)} \circ f_{*}^{p_0} \quad (6). \text{ Από τα παραπάνω έπεται ότι:}$$

$$g_{*}^{f(p)} \circ f_{*}^p = (g \circ f)_{*}^p \quad \text{για κάθε } p \in \mathbb{R}^n, \text{ δηλαδή}$$

το ζητούμενο.

β) Έχουμε τώρα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

$$g_n^* : \prod_{s \in \mathbb{N}^n} \Omega^u(\mathbb{R}_s^v) \rightarrow \prod_{q \in \mathbb{R}^n} \Omega^u(\mathbb{R}_q^m) \text{ και}$$

$$f_n^* : \prod_{q \in \mathbb{R}^n} \Omega^u(\mathbb{R}_q^m) \rightarrow \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^u(\mathbb{R}_p^n).$$

Αρα ορίζεται η συνάρτηση σύνθεσης $f_n^* \circ g_n^*$

$$f_n^* \circ g_n^* : \prod_{s \in \mathbb{N}^n} \Omega^u(\mathbb{R}_s^v) \rightarrow \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^u(\mathbb{R}_p^n)$$

Αυτή ορίζεται ως C^∞ συνάρτηση $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ και

$$(g \circ f)_n^* : \prod_{s \in \mathbb{N}^n} \Omega^u(\mathbb{R}_s^v) \rightarrow \prod_{p \in \mathbb{R}^n} \Omega^u(\mathbb{R}_p^n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

164

Άρα οι συναρτήσεις $(g \circ f)_\#^*$ και $f_\#^* \circ g_\#^*$ είναι
 συναρτήσεις μεταξύ των ίδιων χώρων
 διαφορετικών μορφών και έτσι έχει νόημα να ελέγχσουμε
 εάν είναι ίσες.

Έστω λοιπόν $\omega \in \prod_{p \in P} \Omega^k(p)$ τυχαία.

Τότε $(f_\#^* \circ g_\#^*)(\omega)$ και $(g \circ f)_\#^*(\omega)$ ανήκουν στο

$\prod_{p \in P} \Omega^k(p)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

$p \in P$

Στη θεωρούμε τώρα ένα $p_0 \in P$. Τότε, τα

$((f_\#^* \circ g_\#^*)(\omega))(p_0)$ και $(g \circ f)_\#^*(\omega)(p_0)$ ανήκουν

στο $\Omega^k(p_{f(p_0)})$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Υπολογίζουμε τώρα:

$$\begin{aligned} ((f_\#^* \circ g_\#^*)(\omega))(p_0) &= (f_\#^*(g_\#^*(\omega)))(p_0) = \\ &= ((f^*_{p_0})_\#) \left((g_\#^*(\omega))(f(p_0)) \right) = \\ &= (f^*_{p_0})_\# \left((g^*_{f(p_0)})_\# (\omega(g(f(p_0)))) \right) = \end{aligned}$$

(165)

$$\left(\left((f_{*}^{p_0})_{*}^{*} \right) \circ \left((g_{*}^{f(p_0)})_{*}^{*} \right) \right) (\omega(g \circ f)(p_0)) \quad \underline{\underline{\text{Lemma 2.32}}}$$

$$= \left((g_{*}^{f(p_0)} \circ f_{*})_{*}^{*} \right) (\omega(g \circ f)(p_0)) \quad \underline{\underline{\text{Proposition 2.33, 9)}}}$$

$$= \left((g \circ f)_{*}^{p_0} \right)_{*}^{*} (\omega(g \circ f)(p_0)) \quad \underline{\underline{\text{op/6/70}}}$$

$$= ((g \circ f)_{*}^{*}(\omega))(p_0). (1)$$

Αφού η (1) ισχύει για το τυχόν εραθερονομημένο $p_0 \in \mathcal{P}^Y$
θα ισχύει και για κάθε άλλο $p \in \mathcal{P}^Y$ (αφού το p_0 που
επιλεγεί έχει αυθαίρετη ιδιότητα).

Άρα έπεται ότι: $(f_{*}^{*} \circ g_{*}^{*})(\omega) = (g \circ f)_{*}^{*}(\omega)$ για
το τυχόν διαφορικό μορφή ω . Άρα έπεται ότι:

$f_{*}^{*} \circ g_{*}^{*} = (g \circ f)_{*}^{*}$ και αυτό βέβαια ισχύει για κάθε
 $n \in \mathbb{N}$. Έτσι έπεται το ζητούμενο. ■

Εδώ ολοκληρώσαμε όλες τις βασικές ιδιότητες με τις οποίες κάναμε λογισμό στις διαφορικές μορφές.

Για τις συνέχειες θα κάναμε κάποιες αβιβάσεις για να δούμε πως εφαρμόζονται οι προηγούμενες ιδιότητες στον λογισμό διαφορικών μορφών.

Ας σημειώσουμε για βασική έννοια που θα χρησιμοποιήσουμε στις αβιβάσεις την τυπική, κανονική μορφή για διαφορικών μορφών.

Έστω $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, γνωρίζουμε $A \neq \emptyset$.

Έστω ω να είναι μια k -διαφορική μορφή στο A ,

δηλαδή $\omega \in \prod_{p \in A} \Omega^k(\mathbb{R}^n_p)$.

$p \in A$

Τότε, όπως γνωρίζουμε, υπάρχουν μοναδικά ορισμένες

C^∞ συναρτήσεις $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_k} : A \rightarrow \mathbb{R}$, για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_k) \in (T_n)^{\#}$ ώστε να ισχύει:

$$\omega = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in (T_n)^{\#}} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_k} (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})$$

Όπως γνωρίζουμε, η γραφή της ω με των προηγούμενων γραφή είναι μοναδική.

Αυτή η γραφή θα απομείνει τυπική κανονική μορφή της ω .

Στην επόμενη βερσιό αδειάζω (που είναι ενδεικτικές και για τις εξετάσεις) θα ζητείται να γραφεί μία διαφορετική μορφή των τυπική κανονική μορφή της, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των διαφορικών μορφών που έχουμε παραθέσει προηγούμενα.

Άσκηση 1

Δίνονται τρία διανύσματα διαφορικών μορφών ω_1 και ω_2 στις παρακάτω τρεις περιπτώσεις και ζητείται να γραφεί η διαφορετική μορφή $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2$ στην τυπική κανονική μορφή της.

α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$, A ανοικτό και

$$\omega_1, \omega_2 \in \prod_{p \in A} \mathcal{T}'(\mathbb{R}^2), \text{ όπου:}$$

$$\omega_1 = x_1 dx' + x_2 dx'' \text{ και}$$

$$\omega_2 = x_2 dx' - x_1 dx''$$

β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^4$, $A \neq \emptyset$, A ανοιχτό και

$$\omega_1, \omega_2 \in \prod_{p \in A} \mathcal{T}'(\mathbb{R}^4_p), \text{ όπου:}$$

$$\omega_1 = x_1 x_2 \partial x^1 + x_2 x_3 \partial x^2 + x_1 x_3 \partial x^3 \text{ και}$$

$$\omega_2 = x_3^3 \partial x^3 + x_4^2 \partial x^4$$

γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^4$, $A \neq \emptyset$, A ανοιχτό και

$$\omega_1, \omega_2 \in \prod_{p \in A} \mathcal{T}'(\mathbb{R}^4_p), \text{ όπου:}$$

$$\omega_1 = x_1^2 \partial x^1 + 2 x_1 x_2 \partial x^2 + x_2^2 \partial x^3 \text{ και}$$

$$\omega_2 = x_2^2 \partial x^2 + 2 x_2 x_3 \partial x^3 + x_3^2 \partial x^4$$

Πύλη

α) Σε αυτή την άσκηση χρησιμοποιούμε πολλές φορές την επιμεριστική ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου διαφορίων μορφών ως προς την ηράση, ηράση 2.21, 3, ε, i) και ii)

(169)

Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\omega_1 \wedge \omega_2 &= (x_1 \partial x' + x_2 \partial x^2) \wedge (x_2 \partial x' - x_1 \partial x^2) = \\
&= (x_1 \partial x' + x_2 \partial x^2) \wedge (x_2 \partial x') + \\
&+ (x_1 \partial x' + x_2 \partial x^2) \wedge (-x_1 \partial x^2) = \\
&= (x_1 \partial x') \wedge (x_2 \partial x') + (x_2 \partial x^2) \wedge (x_2 \partial x') + \\
&+ (x_1 \partial x') \wedge (-x_1 \partial x^2) + (x_2 \partial x^2) \wedge (-x_1 \partial x^2) =
\end{aligned}$$

παράγωγες 2.27, 3

$$\begin{aligned}
&= (x_1 x_2) \partial x' \wedge \partial x' + x_2^2 (\partial x^2 \wedge \partial x') + \\
&+ (-x_1^2) \partial x' \wedge \partial x^2 - x_1 x_2 \partial x^2 \wedge \partial x^2 =
\end{aligned}$$

παράγωγες 2.21, 2) και 1)

$$= -x_2^2 (\partial x' \wedge \partial x^2) - x_1^2 (\partial x' \wedge \partial x^2) = -(x_1^2 + x_2^2) (\partial x' \wedge \partial x^2)$$

Παρόμοια έχουμε για το β)

$$\omega_1 \wedge \omega_2 =$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1 x_2 \partial x' + x_2 x_3 \partial x^2 + x_1 x_3 \partial x^3) \wedge (x_3^3 \partial x^3 + x_4^2 \partial x^4) = \\
&=
\end{aligned}$$

(170)

$$\begin{aligned}
 &= (x_1 x_2 \partial x') \wedge (x_3^3 \partial x^3 + x_4^2 \partial x^4) + \\
 &+ (x_2 x_3 \partial x^2) \wedge (x_3^3 \partial x^3 + x_4^2 \partial x^4) + \\
 &+ (x_1 x_3 \partial x^3) \wedge (x_3^3 \partial x^3 + x_4^2 \partial x^4) = \\
 &= (x_1 x_2 \partial x') \wedge (x_3^3 \partial x^3) + (x_1 x_2 \partial x') \wedge (x_4^2 \partial x^4) + \\
 &+ (x_2 x_3 \partial x^2) \wedge (x_3^3 \partial x^3) + (x_2 x_3 \partial x^2) \wedge (x_4^2 \partial x^4) + \\
 &+ (x_1 x_3 \partial x^3) \wedge (x_3^3 \partial x^3) + (x_1 x_3 \partial x^3) \wedge (x_4^2 \partial x^4) = \\
 &= (x_1 x_2 x_3^3) \partial x' \wedge \partial x^3 + (x_1 x_2 x_4^2) \partial x' \wedge \partial x^4 + \\
 &+ (x_2 x_3^3) \partial x^2 \wedge \partial x^3 + (x_2 x_3 x_4^2) \partial x^2 \wedge \partial x^4 + \\
 &+ (x_1 x_3^4) \partial x^3 \wedge \partial x^3 + (x_1 x_3 x_4^2) \partial x^3 \wedge \partial x^4 = \\
 &= (x_1 x_2 x_3^3) \partial x' \wedge \partial x^3 + (x_1 x_2 x_4^2) \partial x' \wedge \partial x^4 + \\
 &+ (x_2 x_3^4) \partial x^2 \wedge \partial x^3 + (x_2 x_3 x_4^2) \partial x^2 \wedge \partial x^4 + \\
 &+ (x_1 x_3 x_4^2) \partial x^3 \wedge \partial x^4.
 \end{aligned}$$

*) Παραπομπή στην προηγούμενη:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 \wedge \omega_2 &= \\
 &= (x_1^2 \partial x' + 2 x_1 x_2 \partial x^2 + x_2^2 \partial x^3) \wedge (x_2^2 \partial x^2 + 2 x_2 x_3 \partial x^3 + x_3^2 \partial x^4) = \\
 &= (x_1^2 \partial x') \wedge (x_2^2 \partial x^2 + 2 x_2 x_3 \partial x^3 + x_3^2 \partial x^4) + \\
 &+ (2 x_1 x_2 \partial x^2) \wedge (x_2^2 \partial x^2 + 2 x_2 x_3 \partial x^3 + x_3^2 \partial x^4) + \\
 &+ (x_2^2 \partial x^3) \wedge (x_2^2 \partial x^2 + 2 x_2 x_3 \partial x^3 + x_3^2 \partial x^4) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x_1^2 \partial x^1) \wedge (x_2^2 \partial x^2) + (x_1^2 \partial x^1) \wedge (2 x_2 x_3 \partial x^3) + \\
 &+ (x_1^2 \partial x^1) \wedge (x_3^2 \partial x^4) + (2 x_1 x_2 \partial x^2) \wedge (x_2^2 \partial x^2) + \\
 &+ (2 x_1 x_2 \partial x^2) \wedge (2 x_2 x_3 \partial x^3) + (2 x_1 x_2 \partial x^2) \wedge (x_3^2 \partial x^4) \\
 &+ (x_2^2 \partial x^3) \wedge (x_2^2 \partial x^2) + (x_2^2 \partial x^3) \wedge (2 x_2 x_3 \partial x^3) + \\
 &+ (x_2^2 \partial x^3) \wedge (x_3^2 \partial x^4) = \\
 &= (x_1^2 x_2^2) \partial x^1 \wedge \partial x^2 + (2 x_1^2 x_2 x_3) \partial x^1 \wedge \partial x^3 + \\
 &+ (x_1^2 x_3^2) \partial x^1 \wedge \partial x^4 + (2 x_1 x_2^3) \partial x^2 \wedge \partial x^2 + \\
 &+ (4 x_1 x_2^2 x_3) \partial x^2 \wedge \partial x^3 + (2 x_1 x_2 x_3^2) \partial x^2 \wedge \partial x^4 + \\
 &+ x_2^4 \partial x^3 \wedge \partial x^2 + (2 x_2^3 x_3) \partial x^3 \wedge \partial x^3 + \\
 &+ (x_2^2 x_3^2) \partial x^3 \wedge \partial x^4 = \\
 &= (x_1^2 x_2^2) \partial x^1 \wedge \partial x^2 + (2 x_1^2 x_2 x_3) \partial x^1 \wedge \partial x^3 + \\
 &+ (x_1^2 x_3^2) \partial x^1 \wedge \partial x^4 + (4 x_1 x_2^2 x_3) \partial x^2 \wedge \partial x^3 + \\
 &+ (2 x_1 x_2 x_3^2) \partial x^2 \wedge \partial x^4 - x_2^4 \partial x^2 \wedge \partial x^3 + (x_2^2 x_3^2) \partial x^3 \wedge \partial x^4.
 \end{aligned}$$

Абунган 2

Берем $A \subseteq \mathbb{R}^4$, A связно, $A \neq \emptyset$ и

$\omega_1, \omega_2 \in \bigwedge^2 \Omega^2(\mathbb{R}^4)$, тогда

$$\omega_1 = (2 x_1 x_2) \partial x^1 \wedge \partial x^2 + (2 x_2 x_3) \partial x^2 \wedge \partial x^3 + 4 x_3 x_4 \partial x^3 \wedge \partial x^4$$

$$\omega_2 = (2 x_1 x_3) \partial x^1 \wedge \partial x^3 + (2 x_1 x_4) \partial x^1 \wedge \partial x^4 + (2 x_2 x_4) \partial x^2 \wedge \partial x^4$$

(172)

Να υπολογιστεί η 4-διαφορικη μορφή $\omega, \wedge \omega_2$
670v 18⁴.

Πύξη

Υπολογισμοί :

$\omega, \wedge \omega_2 =$

$$\begin{aligned}
 & ((2x_1x_2) \partial x' \wedge \partial x^2 + (2x_2x_3) \partial x^2 \wedge \partial x^3 + (4x_3x_4) \partial x^3 \wedge \partial x^4) \wedge \\
 & ((2x_1x_3) \partial x' \wedge \partial x^3 + (2x_1x_4) \partial x' \wedge \partial x^4 + (2x_2x_4) \partial x^2 \wedge \partial x^4) \\
 & = ((2x_1x_2) \partial x' \wedge \partial x^2) \wedge ((2x_1x_3) \partial x' \wedge \partial x^3 + (2x_1x_4) \partial x' \wedge \partial x^4 + (2x_2x_4) \partial x^2 \wedge \partial x^4) \\
 & + ((2x_2x_3) \partial x^2 \wedge \partial x^3) \wedge ((2x_1x_3) \partial x' \wedge \partial x^3 + (2x_1x_4) \partial x' \wedge \partial x^4 + (2x_2x_4) \partial x^2 \wedge \partial x^4) + \\
 & + ((4x_3x_4) \partial x^3 \wedge \partial x^4) \wedge ((2x_1x_3) \partial x' \wedge \partial x^3 + (2x_1x_4) \partial x' \wedge \partial x^4 + (2x_2x_4) \partial x^2 \wedge \partial x^4) \\
 & = ((2x_1x_2) \partial x' \wedge \partial x^2) \wedge ((2x_1x_3) \partial x' \wedge \partial x^3) + \\
 & + ((2x_1x_2) \partial x' \wedge \partial x^2) \wedge ((2x_1x_4) \partial x' \wedge \partial x^4) + \\
 & + ((2x_1x_2) \partial x' \wedge \partial x^2) \wedge ((2x_2x_4) \partial x^2 \wedge \partial x^4) + \\
 & + ((2x_2x_3) \partial x^2 \wedge \partial x^3) \wedge ((2x_1x_3) \partial x' \wedge \partial x^3) + \\
 & + ((2x_2x_3) \partial x^2 \wedge \partial x^3) \wedge ((2x_1x_4) \partial x' \wedge \partial x^4) + \\
 & + ((2x_2x_3) \partial x^2 \wedge \partial x^3) \wedge ((2x_2x_4) \partial x^2 \wedge \partial x^4) + \\
 & + ((4x_3x_4) \partial x^3 \wedge \partial x^4) \wedge ((2x_1x_3) \partial x' \wedge \partial x^3) + \\
 & + ((4x_3x_4) \partial x^3 \wedge \partial x^4) \wedge ((2x_1x_4) \partial x' \wedge \partial x^4) + \\
 & + ((4x_3x_4) \partial x^3 \wedge \partial x^4) \wedge ((2x_2x_4) \partial x^2 \wedge \partial x^4) =
 \end{aligned}$$

(173)

$$\begin{aligned}
 & (4x_1^2x_2x_3) \partial x' \wedge \partial x^2 \wedge \partial x' \wedge \partial x^3 + \\
 & + (4x_1^2x_2x_4) \partial x' \wedge \partial x^2 \wedge \partial x' \wedge \partial x^4 + \\
 & + (4x_1x_2^2x_4) \partial x' \wedge \partial x^2 \wedge \partial x^2 \wedge \partial x^4 + \\
 & + (4x_1x_2x_3^2) \partial x^2 \wedge \partial x^3 \wedge \partial x' \wedge \partial x^3 + \\
 & + (4x_1x_2x_3x_4) \partial x^2 \wedge \partial x^3 \wedge \partial x' \wedge \partial x^4 + \\
 & + (4x_2^2x_3x_4) \partial x^2 \wedge \partial x^3 \wedge \partial x^2 \wedge \partial x^4 + \\
 & + (8x_1x_3^2x_4) \partial x^3 \wedge \partial x^4 \wedge \partial x' \wedge \partial x^3 + \\
 & + (8x_1x_3x_4^2) \partial x^3 \wedge \partial x^4 \wedge \partial x' \wedge \partial x^4 + \\
 & + (8x_2x_3x_4^2) \partial x^3 \wedge \partial x^4 \wedge \partial x^2 \wedge \partial x^4 = \\
 & = (4x_1x_2x_3x_4) \cdot \partial x^2 \wedge \partial x^3 \wedge \partial x' \wedge \partial x^4
 \end{aligned}$$

Σε όλη τη παραπάνω αλυσίδα, έχουμε στο αριστερό
 μέλος το τελικό αποτέλεσμα, το οποίο είναι 0 στο 24^ο
 στάδιο (2.21, 3, 8).

(174)

Έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned} & \partial x^2 \wedge \partial x^3 \wedge \partial x^1 \wedge \partial x^4 = \\ & = (\partial x^2 \wedge \partial x^3) \wedge \partial x^1 \wedge \partial x^4 \quad \underline{\underline{2, 2, 1, 3, 4}} \\ & = (-1)^{1-2} (\partial x^1 \wedge (\partial x^2 \wedge \partial x^3)) \wedge \partial x^4 \quad \underline{\underline{\text{προβελιτισμός}} \\ \text{προβελιτισμός}} \\ & = \partial x^1 \wedge \partial x^2 \wedge \partial x^3 \wedge \partial x^4 \quad (2) \end{aligned}$$

Αρα τελικά έχουμε από τις (1) και (2) ότι:
 $\omega_1 \wedge \omega_2 = (1 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4) \partial x^1 \wedge \partial x^2 \wedge \partial x^3 \wedge \partial x^4$, όπου για
να βρούμε το (2) χρησιμοποιούμε:

Λemma 3

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x, y, z, \omega) = x e^y \sin(z) \cos(\omega),$$

για κάθε $(x, y, z, \omega) \in \mathbb{R}^4$.

1) Να βρεθεί η διαφορίσιμη 1-μορφή df

2) Να προσδιορίσει ο 1-ταυστικός $df(e)$

όπου $e_1 = (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$.

3) Να υπολογιστεί ο αριθμός $(df(e))(u)$, όπου:

$$u = (1, 2, 2018, 4)$$

Προφανώς $df \in \frac{\prod_{p \in \mathbb{R}^4} \mathbb{R}}{\mathbb{R}} \mathcal{J}'(\mathbb{R}^4_p)$.

Από την πρόταση 2.3 έχουμε ότι:

$$df = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Αν θέσουμε αρχικά τον συμβολισμό των μεταβλητών στον τύπο της f από $x \in X_1$, το $y \in X_2$, το $z \in X_3$ και το $w \in X_4$. Έτσι f έχει τύπο:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 e^{x_2} \sin x_3 \cos x_4 \quad (1) \text{ για κάθε } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4.$$

Από τον τύπο (1) τώρα της f έχουμε για τη συνάρτηση από τον απειροστικό λογισμό (III) :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = e^{x_2} \sin x_3 \cos x_4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 e^{x_2} \sin x_3 \cos x_4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1 e^{x_2} \cos x_3 \cos x_4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = -x_1 e^{x_2} \sin x_3 \sin x_4$$

Exemple 10100: $x_1 = e_1 = (1, 0, 0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(e_1) = e^0 \sin 0 \cos 0 = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(e_1) = 1 \cdot e^0 \cdot \sin 0 \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(e_1) = 1 \cdot e^0 \cdot \cos 0 \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4}(e_1) = -1 \cdot e^0 \cdot \sin 0 \cdot \sin 0 = -1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

Après exemple

$$df = (e^{x_2} \sin x_3 \cos x_4) dx^1 + (x_1 e^{x_2} \sin x_3 \cos x_4) dx^2 + (x_1 e^{x_2} \cos x_3 \cos x_4) dx^3 - (x_1 e^{x_2} \sin x_3 \sin x_4) dx^4$$

(177)

2) Αρα έχουμε: από τις ορίσεις των ηρώσεων των διαφορίσιμων μορφών

$$df(e_1) = \left(\sum_{i=1}^4 \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right)(e_1) =$$

$$= \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right)(e_1) =$$

$$= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f}{\partial x^i}(e_1) \cdot dx^i(e_1) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^1}(e_1) \cdot dx^1(e_1) + \frac{\partial f}{\partial x^2}(e_1) \cdot dx^2(e_1) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x^3}(e_1) \cdot dx^3(e_1) + \frac{\partial f}{\partial x^4}(e_1) \cdot dx^4(e_1) =$$

$$= 0 \cdot dx^1(e_1) + 0 \cdot dx^2(e_1) + 1 \cdot dx^3(e_1) + 0 \cdot dx^4(e_1)$$

$$= dx^3(e_1).$$

Αρα έχουμε ότι $df(e_1) = dx^3(e_1)$, δηλαδή

$df(e_1): \mathbb{R}^4_{e_1} \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

$$(df(e_1))(u_{e_1}) = (dx^3(e_1))(u_{e_1}) = u_3 \quad \text{για } u_{e_1} \in \mathbb{R}^4_{e_1}$$

$$u \in \mathbb{R}^4_{e_1}$$

3) Τέλος έχουμε:

$$(df(e_1))(u) = (\partial x^3(e_1))((1, 2, 2018, 4)) = 2018$$

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x, y) = x^2 y^2 e^{x+y} \text{ για κάθε } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Να προσδιοριστεί το διαφορίο df
- Να βρεθεί το $df(p)$ για $p = (1, 2)$
- Να υπολογιστεί ο αριθμός $df(p)(p_p), p = (1, 2)$

Λύση

Γράφουμε πρώτα την f με μεταβλητές x_1 και x_2 ,
 δηλαδή x_1 αντί x και x_2 αντί y . Έτσι ο τύπος της f
 γράφεται: $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 e^{x_1+x_2}$.

Από την πρόταση 2.3 έχουμε:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx^2$$

Υπολογίστε την τιμή του α από τον παρακάτω
 λογαριθμό (III)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_1 x_2^2 e^{x_1+x_2} (x_1+2) \quad \text{για}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^2 x_2 e^{x_1+x_2} (x_2+2).$$

Αρα έχουμε:

$$df = (x_1 x_2^2 e^{x_1+x_2} (x_1+2)) dx' + (x_1^2 x_2 e^{x_1+x_2} (x_2+2)) dx''$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g_1, g_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με
 τύπους: $g_1((x_1, x_2)) = x_1 x_2^2 e^{x_1+x_2} (x_1+2)$ για

$$g_2((x_1, x_2)) = x_1^2 x_2 e^{x_1+x_2} (x_2+2) \quad \text{για κάθε}$$

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Έτσι, πιο συνοπτικά η df γράφεται

$$\text{ως εξής: } df = g_1 dx' + g_2 dx''.$$

β) Για να χάνει $p \in \mathbb{R}^2$ έχουμε από τους
 ορισμούς της ηρώσεως διαφορίων μορφών και
 γινόμενου εσωτερικής εη διαφορίων μορφών:

(180)

$$\begin{aligned} \partial f(p) &= (g_1 \partial x^1 + g_2 \partial x^2)(p) = \\ &= (g_1 \partial x^1)(p) + (g_2 \partial x^2)(p) = g_1(p) \partial x^1(p) + g_2(p) \partial x^2(p). \end{aligned}$$

Apoi na $p=(1,2)$ exemplo.

$$g_1(p) = g_1((1,2)) = 1 \cdot 2^2 \cdot e^{1+2} (1+2) = 12 e^3 \text{ now}$$

$$g_2(p) = g_2((1,2)) = 1^2 \cdot 2 \cdot e^{1+2} (2+2) = 8 e^3.$$

Apoi exemplo

$$\partial f(p) : \mathbb{R}_p^2 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ now}$$

$$\partial f(p) = 12 e^3 \partial x^1(p) + 8 e^3 \partial x^2(p).$$

o) Aho to (b) na/prova.

$$\partial f(p)(p_p) = (12 e^3 \partial x^1(p) + 8 e^3 \partial x^2(p))(p_p)$$

$$= 12 e^3 \partial x^1(p)(p_p) + 8 e^3 \partial x^2(p)(p_p) =$$

$$= 12 e^3 p_1 + 8 e^3 p_2 = 4 e^3 (3 p_1 + 2 p_2) \text{ na}$$

nao de $p \in \mathbb{R}^2$. Apoi na to $p=(1,2)$ exemplo.

$$\partial f(p)(p_p) = 4 e^3 \cdot (3 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = 28 e^3.$$

Άσκηση 5

Δίνεται η διαφορική ~~μορφή~~ 2-μορφή στον $\mathbb{R}^3$

$$\omega = (x_1 + x_2 + x_3) dx^1 \wedge dx^2 + (x_1 x_2 x_3) dx^2 \wedge dx^3 \\ + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) dx^1 \wedge dx^3$$

Να γραφεί η διαφορική μορφή $d\omega$ σε πηλίκη, ικανονική μορφή.

Λύση

Θέτουμε $f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τρόπο:

$$f_1((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + x_2 + x_3,$$

$f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τρόπο:

$$f_2((x_1, x_2, x_3)) = x_1 x_2 x_3 \quad \text{και}$$

$f_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τρόπο:

$$f_3((x_1, x_2, x_3)) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$$

για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ και για

f_1, f_2 και f_3 .

182

Έτσι η ω σε τυπική κανονική μορφή γράφεται ως εξής:

$$\omega = f_1 \cdot (dx' \wedge dx^2) + f_2 \cdot (dx^2 \wedge dx^3) + f_3 (dx' \wedge dx^3) \quad (1)$$

Η $d\omega$ τώρα είναι ορίζοντος είναι η διαφορική 3-μορφή στον $\mathbb{R}^3$:

$$d\omega = df_1 \wedge (dx' \wedge dx^2) + df_2 \wedge (dx^2 \wedge dx^3) + df_3 \wedge (dx' \wedge dx^3) \quad (2)$$

Προσοχή: Η $d\omega$ στην μορφή που ορίζεται στην

(2) ΔΕΝ είναι σε τυπική κανονική μορφή.

Η μορφή της $d\omega$ στην (2) είναι απλά αυτή που την προσδιορίζει. Η διαδικασία με την οποία θα γράψουμε την $d\omega$ σε τυπική κανονική μορφή ακολουθεί παρόμοια.

Για αρχήν προσδιορίζουμε τις διαφορίσιμες 1-μορφές df_1, df_2 και df_3 .

Θα χρησιμοποιήσουμε γι' αυτό την πρόταση 2.3

(Θα πρέπει να ανατρέξετε στον Απειροστικό λογισμό III για το πως υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους μιας συνάρτησης).

Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 1.$$

$$\text{Άρα } df_1 = 1 \cdot dx^1 + 1 \cdot dx^2 + 1 \cdot dx^3 = dx^1 + dx^2 + dx^3$$

Ανάλυση:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = x_2 x_3, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = x_1 x_3, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = x_1 x_2.$$

Άρα έχουμε:

$$df_2 = (x_2 x_3) dx^1 + (x_1 x_3) dx^2 + (x_1 x_2) dx^3 \quad (4)$$

Αυτός έχει:

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = x_2 + x_3, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = x_1 + x_3, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = x_1 + x_2.$$

Αρα έχουμε:

$$df_3 = (x_2 + x_3) dx^1 + (x_1 + x_3) dx^2 + (x_1 + x_2) dx^3 \quad (5)$$

Από την (3) έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned} df_1 \wedge (dx^1 \wedge dx^2) &= (dx^1 + dx^2 + dx^3) \wedge (dx^1 \wedge dx^2) \\ &\stackrel{\text{επιμερ/67146777}}{=} dx^1 \wedge (dx^1 \wedge dx^2) + dx^2 \wedge (dx^1 \wedge dx^2) \\ &+ dx^3 \wedge (dx^1 \wedge dx^2) = \stackrel{\text{απο67964 2.21, 3, 6) και 8)}}{=} \\ &= 0 + 0 + (-1)^{2 \cdot 1} \cdot (dx^1 \wedge dx^2) \wedge dx^3 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \quad (6). \end{aligned}$$

Αυτός έχει: από την (4)

$$\begin{aligned} df_2 \wedge (dx^2 \wedge dx^3) &= \\ &= ((x_2 x_3) dx^1 + (x_1 x_3) dx^2 + (x_1 x_2) dx^3) \wedge (dx^2 \wedge dx^3) \stackrel{\text{επιμερ}}{=} \\ &= ((x_2 x_3) dx^1) \wedge (dx^2 \wedge dx^3) + ((x_1 x_3) dx^2) \wedge (dx^2 \wedge dx^3) \\ &+ ((x_1 x_2) dx^3) \wedge (dx^2 \wedge dx^3) \stackrel{\text{απο9749464 2.27, 3)}}{=} \end{aligned}$$

$$= (x_2 x_3) (\partial x' \wedge \partial x^2 \wedge \partial x^3) + (x_1 x_3) (\partial x^2 \wedge (\partial x^2 \wedge \partial x^3)) \\ + (x_1 x_2) (\partial x^3 \wedge (\partial x^2 \wedge \partial x^3)) \stackrel{\text{προτάση 2.21, 3, δ)} \text{ και προθεσμία 19/67.}}{=} (x_2 x_3) (\partial x' \wedge \partial x^2 \wedge \partial x^3) \\ + 0 + 0 = (x_2 x_3) (\partial x' \wedge \partial x^2 \wedge \partial x^3) / 7)$$

Απόψη εχούμε στο 7η σελίδα

$$\partial f_3 \wedge (\partial x' \wedge \partial x^3) = \\ = ((x_2 + x_3) \partial x' + (x_1 + x_3) \partial x^2 + (x_1 + x_2) \partial x^3) \wedge (\partial x' \wedge \partial x^3) \\ \stackrel{\text{προθεσμία 2.21, 3, δ)} \text{ και προθεσμία 19/67.}}{=} ((x_2 + x_3) \partial x') \wedge (\partial x' \wedge \partial x^3) + \\ + ((x_1 + x_3) \partial x^2) \wedge (\partial x' \wedge \partial x^3) + \\ + ((x_1 + x_2) \partial x^3) \wedge (\partial x' \wedge \partial x^3) \stackrel{\text{προθεσμία 2.27, 3)}}{=} \\ = (x_2 + x_3) \cdot (\partial x' \wedge (\partial x' \wedge \partial x^3)) + \\ + (x_1 + x_3) \cdot (\partial x^2 \wedge (\partial x' \wedge \partial x^3)) + \\ + (x_1 + x_2) \cdot (\partial x^3 \wedge (\partial x' \wedge \partial x^3)) \stackrel{\text{προτάση 2.21, 3, δ)}}{=} \\ = 0 + (x_1 + x_3) \cdot ((\partial x^2 \wedge \partial x') \wedge \partial x^3) + 0 \stackrel{\text{προθεσμία 2.21, 3, δ)}}{=} \\ = (x_1 + x_3) \cdot (-1) (\partial x' \wedge \partial x^2) \wedge \partial x^3 \stackrel{\text{προθεσμία 2.27, 3)}}{=} \\ = (- (x_1 + x_3)) \cdot (\partial x' \wedge \partial x^2 \wedge \partial x^3) / 8)$$

Αντικαθιστούμε τους από από 74 (6) 72) και (8) στον (2) και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \omega &= dx' \wedge dx^2 \wedge dx^3 + (x_2 x_3) (dx' \wedge dx^2 \wedge dx^3) \\ &+ (- (x_1 + x_3)) (dx' \wedge dx^2 \wedge dx^3) \quad \text{παράγωγος 2.27.2)} \\ &= (1 + x_2 x_3 - (x_1 + x_3)) \cdot (dx' \wedge dx^2 \wedge dx^3) \quad (9) \end{aligned}$$

Ορίζουμε $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g((x_1, x_2, x_3)) = 1 + x_2 x_3 - x_1 - x_3, \text{ για κάθε}$$

$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Τότε από την (9) έχουμε ότι η

τυπική ικανονική μορφή του ω είναι η:

$$\omega = g \cdot dx' \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Άσκηση 6

Δίνεται η διαφορική μορφή -1 στον $\mathbb{R}^3$

$$\omega = (-x_1 + x_2 + x_3)^2 dx' + (x_1 - x_2 + x_3)^2 dx^2 + (x_1 + x_2 - x_3)^2 dx^3.$$

Να υπολογιστεί η τυπική ικανονική μορφή του 2-διαφορικής μορφής ω στον $\mathbb{R}^3$.

Πύλη

Θ' ακολουθήσουμε την μεθοδολογία της προηγούμενης άσκησης

Έστω $f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ για συνάρτηση με

$$f_1((x_1, x_2, x_3)) = (-x_1 + x_2 + x_3)^3, \text{ για κάθε } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Έστω $f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι η συνάρτηση με τύπο:

$$f_2((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_2 + x_3)^3 \text{ για κάθε } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Έστω ακόμα $f_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι η συνάρτηση με τύπο:

$$f_3((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2 - x_3)^3 \text{ για κάθε } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Έχουμε τώρα ότι η ω σε τυπική κανονική μορφή
γράφεται ως εξής:

$$\omega = f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + f_3 dx^3. (1)$$

Έτσι ε3' ορίζουμε έχουμε ότι

$$d\omega = df_1 \wedge dx^1 + df_2 \wedge dx^2 + df_3 \wedge dx^3. (2)$$

Η γραφή (2) της $d\omega$ δεν είναι η τυπική κανονική μορφή της. Αυτήν θα την υπολογίσουμε παρακάτω.

(188)

Από την πρόταση 2.3 έχουμε:

$$df_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx^1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx^2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} dx^3 \quad (3)$$

Έχουμε τώρα:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -3(x_2 + x_3 - x_1)^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 3(x_2 + x_3 - x_1)^2,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 3(x_2 + x_3 - x_1)^2.$$

∂x_3

Από από την παραπάνω έχουμε:

$$\begin{aligned} df_1 &= -3(x_2 + x_3 - x_1)^2 dx^1 + 3(x_2 + x_3 - x_1)^2 dx^2 + 3(x_2 + x_3 - x_1)^2 dx^3 \\ &= 3(x_2 + x_3 - x_1)^2 \cdot (-dx^1 + dx^2 + dx^3) \quad (3) \end{aligned}$$

Αντίφα έχουμε:

$$df_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx^1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx^2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} dx^3 \quad (4)$$

Αντίφα έχουμε:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 3(x_1 - x_2 + x_3)^2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -3(x_1 - x_2 + x_3)^2,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 3(x_1 - x_2 + x_3)^2 \cdot \text{Apr}$$

$$\begin{aligned} df_2 &= 3(x_1 - x_2 + x_3)^2 dx^1 - 3(x_1 - x_2 + x_3)^2 dx^2 + 3(x_1 - x_2 + x_3)^2 dx^3 = \\ &= 3(x_1 - x_2 + x_3)^2 (dx^1 - dx^2 + dx^3) \quad (5) \end{aligned}$$

Аудың есепте:

$$df_3 = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx^1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx^2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx^3 \quad (6)$$

Есепте:

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 3(x_1 + x_2 - x_3)^2, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 3(x_1 + x_2 - x_3)^2,$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_3} = -3(x_1 + x_2 - x_3)^2.$$

Apr есепте:

$$\begin{aligned} df_3 &= 3(x_1 + x_2 - x_3)^2 dx^1 + 3(x_1 + x_2 - x_3)^2 dx^2 - 3(x_1 + x_2 - x_3)^2 dx^3 = \\ &= 3(x_1 + x_2 - x_3)^2 (dx^1 + dx^2 - dx^3) \quad (7) \end{aligned}$$

Ανο γιν (3) έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned}
 df_1 \wedge dx' &= (3(x_2 + x_3 - x_1)^2 \cdot (-dx' + dx^2 + dx^3)) \wedge dx' = \\
 &= 3(x_2 + x_3 - x_1)^2 \cdot ((-dx' + dx^2 + dx^3) \wedge dx') = \\
 &= 3(x_2 + x_3 - x_1)^2 \cdot ((-dx') \wedge dx' + dx^2 \wedge dx' + dx^3 \wedge dx') = \\
 &= 3(x_2 + x_3 - x_1)^2 \cdot (0 + dx^2 \wedge dx' - dx' \wedge dx^3) = \\
 &= -3(x_2 + x_3 - x_1)^2 (dx' \wedge dx^2 + dx' \wedge dx^3) \quad (8).
 \end{aligned}$$

Ανο γιν (5) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 df_2 \wedge dx^2 &= (3(x_1 - x_2 + x_3)^2 \cdot (dx' - dx^2 + dx^3)) \wedge dx^2 = \\
 &= 3(x_1 - x_2 + x_3)^2 \cdot ((dx' - dx^2 + dx^3) \wedge dx^2) = \\
 &= 3(x_1 - x_2 + x_3)^2 \cdot (dx' \wedge dx^2 + (-dx^2) \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^2) = \\
 &= 3(x_1 - x_2 + x_3)^2 \cdot (dx' \wedge dx^2 - dx^2 \wedge dx^3) \quad (9).
 \end{aligned}$$

Ανο γιν (7) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 df_3 \wedge dx^3 &= (3(x_1 + x_2 - x_3)^2 \cdot (dx' + dx^2 - dx^3)) \wedge dx^3 = \\
 &= 3(x_1 + x_2 - x_3)^2 \cdot ((dx' + dx^2 - dx^3) \wedge dx^3) = \\
 &= 3(x_1 + x_2 - x_3)^2 \cdot (dx' \wedge dx^3 + dx^2 \wedge dx^3 - dx^3 \wedge dx^3) = \\
 &= 3(x_1 + x_2 - x_3)^2 \cdot (dx' \wedge dx^3 + dx^2 \wedge dx^3) \quad (10).
 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (8) τις (9) και (10) έχουμε (2)
 παίρνουμε:

$$\begin{aligned} d\omega &= -3(x_2+x_3-x_1)^2 (dx^1 dx^2 + dx^1 dx^3) + \\ &+ 3(x_1-x_2+x_3)^2 (dx^1 dx^2 - dx^2 dx^3) + \\ &+ 3(x_1+x_2-x_3)^2 (dx^1 dx^3 + dx^2 dx^3) = \\ &= (-3(x_2+x_3-x_1)^2) \cdot (dx^1 dx^2) + (-3(x_2+x_3-x_1)^2) \cdot (dx^1 dx^3) \\ &+ 3(x_1-x_2+x_3)^2 (dx^1 dx^2) - 3(x_1-x_2+x_3)^2 \cdot (dx^2 dx^3) \\ &+ 3(x_1+x_2-x_3)^2 (dx^1 dx^3) + 3(x_1+x_2-x_3)^2 (dx^2 dx^3) \\ &= (-3(x_2+x_3-x_1)^2 + 3(x_1-x_2+x_3)^2) \cdot (dx^1 dx^2) \\ &+ (-3(x_2+x_3-x_1)^2 + 3(x_1+x_2-x_3)^2) (dx^1 dx^3) + \\ &+ (-3(x_1-x_2+x_3)^2 + 3(x_1+x_2-x_3)^2) (dx^2 dx^3) \quad (11). \end{aligned}$$

Έχουμε τώρα με τη βοήθεια στοιχειωδών:

$$-3(x_2+x_3-x_1)^2 + 3(x_1-x_2+x_3)^2 = 12(x_1-x_2) \cdot x_3 \quad (12)$$

$$-3(x_2+x_3-x_1)^2 + 3(x_1+x_2-x_3)^2 = 12(x_1-x_3) x_2 \quad (13)$$

$$-3(x_1-x_2+x_3)^2 + 3(x_1+x_2-x_3)^2 = 12(x_2-x_3) x_1 \quad (14).$$

Αντικαθιστώντας στην (12) τις (13) και (14) έχουμε (11) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} d\omega &= (12(x_1-x_2)x_3) dx^1 dx^2 + (12(x_1-x_3)x_2) dx^1 dx^3 \\ &+ (12(x_2-x_3)x_1) dx^2 dx^3. \end{aligned}$$

Άσκηση 7

Δίνεται η 7-διαφορικώς ω στον $\mathbb{R}^7$, όπου:

$$\omega = dx' \wedge dx^7 \wedge dx^4 \wedge dx^5 \wedge dx^3 \wedge dx^6 \wedge dx^2$$

Να γραφεί η ω σε τυπική κανονική μορφή.

Λύση

Σε αυτή την άσκηση θα χρησιμοποιήσουμε την προβλεπόμενη ιδιότητα του εξωτερικού διανυσματος των διαφορικών μορφών και την ιδιότητα της πρότασης 2.21, 3) δ).

Πόσω της προβλεπόμενης ιδιότητας (όπως είναι γνωστό από την αφαιρετική άλγεβρα) το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από οποιαδήποτε χρήση παρενθέσεων όταν η σειρά των παραγόντων δεν αλλάξει. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \omega &= dx' \wedge dx^7 \wedge dx^4 \wedge dx^5 \wedge dx^3 \wedge dx^6 \wedge dx^2 = \\ &= (dx' \wedge dx^7) \wedge (dx^4 \wedge dx^5 \wedge dx^3 \wedge dx^6 \wedge dx^2) = \\ &= dx' \wedge (dx^7 \wedge (dx^4 \wedge dx^5 \wedge dx^3 \wedge dx^6 \wedge dx^2)) \\ &= dx' \wedge ((dx^4 \wedge dx^5 \wedge dx^3 \wedge dx^6 \wedge dx^2) \wedge dx^7) (-1)^{5 \cdot 1} \\ &= dx' \wedge (-1) \cdot (dx^4 \wedge dx^5 \wedge dx^3 \wedge dx^6) \wedge dx^2 \wedge dx^7 = \\ &= (-1) \cdot (dx' \wedge ((-1)^4 dx^2 \wedge (dx^4 \wedge dx^5 \wedge dx^3 \wedge dx^6)) \wedge dx^7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1) \cdot (\partial x^1 \wedge (\partial x^2 \wedge \partial x^4 \wedge \partial x^5 \wedge \partial x^3 \wedge \partial x^6) \wedge \partial x^7) \\
 &= (-1) \cdot (\partial x^1 \wedge ((\partial x^2 \wedge ((\partial x^4 \wedge \partial x^5) \wedge \partial x^3) \wedge \partial x^6) \wedge \partial x^7)) \\
 &= (-1) \cdot (\partial x^1 \wedge (\partial x^2 \wedge (-1)^{1 \cdot 2} \partial x^3 \wedge (\partial x^4 \wedge \partial x^5)) \wedge \partial x^6 \wedge \partial x^7) \\
 &= (-1) \cdot (\partial x^1 \wedge \partial x^2 \wedge \partial x^3 \wedge \partial x^4 \wedge \partial x^5 \wedge \partial x^6 \wedge \partial x^7)
 \end{aligned}$$

Άρα
 $\omega = - (\partial x^1 \wedge \partial x^2 \wedge \partial x^3 \wedge \partial x^4 \wedge \partial x^5 \wedge \partial x^6 \wedge \partial x^7)$ σε
 τυπική κανονική μορφή.

Άσκηση 8
 Έστω $n, m \in \mathbb{N}$ $\psi \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$ και
 ω να είναι μια n -διαφορική μορφή στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή
 $\omega \in \bigwedge^n \Omega^1(\mathbb{R}^n)$. Έστω ακόμα $n \in \mathbb{N}$ και, $n \leq m$ και
 $\varphi \in \mathbb{R}^m$

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ να είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση.
 Να περιγραφεί λεπτομερώς μια διαδικασία (ένα σετ από
 αλγόριθμους) με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε την
 n -διαφορική μορφή $f^*(\omega) \in \bigwedge^n \Omega^1(\mathbb{R}^n)$, σε
 τυπική κανονική μορφή.

(194)

Λύση

Έστω το χαίτη $\omega_0 \in \prod_{q \in \mathbb{R}^m} \Omega^4(\mathbb{R}^m)$, των οποίων

στηθεροποιούμε. Τότε όπως συμπεριλαμβανόμενα υπάρχουν μοναδικές

ορισμένες συναρτήσεις $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_4}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_4) \in (T_m^4)^*$ ώστε να ισχύει:

$$\omega_0 = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_4) \in (T_m^4)^*} \omega_{i_1, i_2, \dots, i_4} (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_4}) \quad (1)$$

όπου οι $\omega_{i_1, i_2, \dots, i_4}$ είναι τρέχον C^∞ για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_4) \in (T_m^4)^*$.

Από την γραμμικότητα της f_4^* και την (1) παίρνουμε:

$$f_4^*(\omega_0) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_4) \in (T_m^4)^*} f_4^* \left(\omega_{i_1, i_2, \dots, i_4} (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_4}) \right) \quad (2)$$

Έτσι από την (2) το πρώτο βήμα είναι να υπολογίσουμε οι διαφορικές μορφές:

$$f_4^* \left(\omega_{i_1, i_2, \dots, i_4} (dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_4}) \right) \text{ για κάθε } (i_1, i_2, \dots, i_4) \in (T_m^4)^*.$$

Από την πρόταση 2.10 παίρνουμε τώρα ότι:

$$\begin{aligned} f_u^* (\omega_{i_1, i_2, \dots, i_u} \cdot (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u})) &= \\ &= (\omega_{i_1, i_2, \dots, i_u} \circ f) \cdot f_u^* (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u}) \quad (3), \text{ για} \\ &\text{κάθε } (i_1, i_2, \dots, i_u) \in (T_M)^* \end{aligned}$$

Άρα από την (3) αρκεί τώρα να υπολογίσουμε τις $f_u^* (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u})$ για κάθε $(i_1, i_2, \dots, i_u) \in (T_M)^*$.

Θα δείξουμε τώρα επαγωγικά ότι ισχύει:

$$\begin{aligned} f_u^* (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u}) &= \\ &= f_1^* (\partial x^{i_1}) \wedge f_1^* (\partial x^{i_2}) \wedge \dots \wedge f_1^* (\partial x^{i_u}), \text{ με επαγωγή από} \end{aligned}$$

στο 4.

Από την πρόταση 2.13 για $u=2$, και για τις $\omega = \partial x^{i_1}$ και $\omega = \partial x^{i_2}$ έχουμε:

$$f_2^* (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2}) = f_1^* (\partial x^{i_1}) \wedge f_1^* (\partial x^{i_2}).$$

Ας υποθέσουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για κάποιο $u \in \mathbb{N}$, $u \geq 2$, θα δείξουμε ότι ισχύει και για $u+1$.

Για τις 1-διαφορικές μορφές $\partial x^{i_1}, \partial x^{i_2}, \dots, \partial x^{i_{u+1}}$,

στον $\mathbb{R}^n$, για $u+1 \leq \min\{m, n\}$ έχουμε για την $u+1$ διαφορική μορφή $\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_{u+1}}$ στον $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
 f_{u+1}^* (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_{u+1}}) &= \\
 &= f_{u+1}^* (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u}) \wedge \partial x^{i_{u+1}} \quad \text{πρόταση 2.13} \\
 &= f_u^* (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u}) \wedge f_1^* (\partial x^{i_{u+1}}) \quad \text{εναρμονισμός βιέλλων} \\
 &= (f_u^* (\partial x^{i_1}) \wedge f_1^* (\partial x^{i_2}) \wedge \dots \wedge f_1^* (\partial x^{i_u}) \wedge f_1^* (\partial x^{i_{u+1}}))
 \end{aligned}$$

και έδειξαν το ζητούμενο για $u+1$.

Άρα τελικά έχουμε ότι:

$$f_u^* (\partial x^{i_1} \wedge \partial x^{i_2} \wedge \dots \wedge \partial x^{i_u}) = f_1^* (\partial x^{i_1}) \wedge f_1^* (\partial x^{i_2}) \wedge \dots \wedge f_1^* (\partial x^{i_u}) \quad (4)$$

Άρα από την (4) αρκεί τώρα να υποδείξουμε ότι

$$f_1^* (\partial x^j) \text{ για κάθε } j \in \{i_1, i_2, \dots, i_u\}$$

Η $f_1^* (\partial x^j)$ για $j \in \{i_1, i_2, \dots, i_u\}$ υποδηλώνεται τώρα από την πρόταση 2.9.

Έτσι έχουμε από την 2.9 ότι:

$$f_1^* (\partial x^j) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x^i} \partial x^i \quad \text{για κάθε}$$

$$j \in \{i_1, i_2, \dots, i_u\} \quad (5)$$

Χρησιμοποιώντας, τώρα την (5) για όλα τα

$j \in \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ βρίσκουμε την $f_j^*(\partial x^j)$.

Μετά από την (4) με χρήση της επιμετρικότητας ιδιοτήτων

του εσωτερικού γινομένου διαφορικών μορφών ως προς την

ηρόδωξη των άδων ιδιοτήτων των διαφορικών μορφών,

υπολογίζουμε την $f_n^*(\partial x^{i_1}, \partial x^{i_2}, \dots, \partial x^{i_n})$ για κάθε

$(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (\mathbb{T}_m^n)^*$.

Αντικαθιστώντας μετά στην (3) και μετά στην (2) για κάθε

$(i_1, i_2, \dots, i_n) \in (\mathbb{T}_m^n)^*$ υπολογίζουμε τελικά την $f_{\#}^*(\omega_0)$.

Για να δειχτεί απαιτούμενη η άσκηση 8 θα δώσουμε

παρακάτω με τις ασκήσεις 9 και 10 δύο εφαρμογές της

διαδικασίας που περιγράφεται στην 8.

Άσκηση 9

Δίνεται η διαφορική 1-μορφή ω_0 στον $\mathbb{R}^3$

$\omega_0 = x_1^2 dx^1 + x_2^2 dx^2 + x_3^2 dx^3$. Να υπολογιστεί η

1- διαφορική μορφή $f_1^*(\omega_0)$ στον $\mathbb{R}^2$, όπου

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $f((x_1, x_2)) = (x_1 + x_2, x_1 x_2, x_1 - x_2)$

για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, σε τυπική κανονική μορφή.

Πύλη

Από την εφαρμογή της συνάρτησης f_1^* , έχουμε:

$$f_1^* : \prod_{q \in \mathbb{R}^3} \mathcal{F}'(\mathbb{R}^3) \rightarrow \prod_{p \in \mathbb{R}^2} \mathcal{F}'(\mathbb{R}^2) \text{ έχουμε:}$$

$$\begin{aligned} f_1^*(\omega_0) &= f_1^*(x_1^2 dx' + x_2^2 dx^2 + x_3^2 dx^3) = \\ &= f_1^*(x_1^2 dx') + f_1^*(x_2^2 dx^2) + f_1^*(x_3^2 dx^3)_{//}. \end{aligned}$$

Θέτουμε τώρα τις συναρτήσεις:

$$g_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με νόμο: } g_1((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 \text{ για κάθε } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

$$g_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με νόμο: } g_2((x_1, x_2, x_3)) = x_2^2 \text{ για}$$

$$\text{κάθε } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ και}$$

$$g_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με νόμο: } g_3((x_1, x_2, x_3)) = x_3^2 \text{ για}$$

$$\text{κάθε } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Έτσι με βάση τους παραπάνω συμβολισμούς η (1)

γράφεται:

$$f_1^*(\omega_0) = f_1^*(g_1 dx') + f_1^*(g_2 dx^2) + f_1^*(g_3 dx^3)_{//}.$$

Από την ορισμένη 2.10 έχουμε τώρα:

$$f_1^*(g_1 \cdot dx^1) = (g_1 \circ f) \cdot f_1^*(dx^1) \quad (2)$$

$$f_1^*(g_2 \cdot dx^2) = (g_2 \circ f) \cdot f_1^*(dx^2) \quad (3)$$

$$f_1^*(g_3 \cdot dx^3) = (g_3 \circ f) \cdot f_1^*(dx^3) \quad (4)$$

Έχουμε τώρα ότι $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ούτως

$$\begin{aligned} (g_1 \circ f)((x_1, x_2)) &= g_1(f((x_1, x_2))) = \\ &= g_1((x_1 + x_2, x_1 x_2, x_1 - x_2)) = (x_1 + x_2)^2 \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g_2 \circ f)((x_1, x_2)) &= g_2(f((x_1, x_2))) = \\ &= g_2((x_1 + x_2, x_1 x_2, x_1 - x_2)) = (x_1 x_2)^2 \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g_3 \circ f)((x_1, x_2)) &= g_3(f((x_1, x_2))) = \\ &= g_3((x_1 + x_2, x_1 x_2, x_1 - x_2)) = (x_1 - x_2)^2 \quad (7) \end{aligned}$$

Έχουμε τώρα: $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με νόμο:

$$f_1((x_1, x_2)) = x_1 + x_2 \quad \text{για κάθε } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με νόμο: $f_2((x_1, x_2)) = x_1 x_2$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ και $f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με νόμο: $f_3((x_1, x_2)) = x_1 - x_2$ για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Από την πρόταση 2.9 παίρνουμε τώρα:

$$f_1^*(dx^1) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx^j, \quad (8)$$

$$f_1^*(dx^2) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx^j, \quad \text{και} \quad (9)$$

$$f_1^*(dx^3) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f_3}{\partial x_j} dx^j \quad (10)$$

Εκπομείς τώρα:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 1, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= 1, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= x_2, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= x_1, \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} &= 1, & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (11).$$

Από τις (8) και (11) έχουμε:

$$f_1^*(dx^1) = dx^1 + dx^2 \quad (12)$$

Από τις (9) και (11) έχουμε:

$$f_1^*(dx^2) = x_2 dx^1 + x_1 dx^2 \quad (13)$$

Από τις (10) και (11) έχουμε:

$$f_1^*(dx^3) = dx^1 - dx^2 \quad (14).$$

אנחנו רוצים להוכיח את (15) ואת (16) שמתקיימות:

$$f_1^*(g_1 \cdot dx^1) = (x_1 + x_2)^2 \cdot (dx^1 + dx^2) \quad (15).$$

אנחנו רוצים להוכיח את (16) ואת (17) שמתקיימות:

$$f_1^*(g_2 \cdot dx^2) = (x_1 x_2)^2 \cdot (x_2 dx^1 + x_1 dx^2) \quad (16).$$

אנחנו רוצים להוכיח את (17) ואת (18) שמתקיימות:

$$f_1^*(g_3 \cdot dx^3) = (x_1 - x_2)^2 \cdot (dx^1 - dx^2) \quad (17).$$

אנחנו רוצים להוכיח את (15), (16) ואת (17) שמתקיימות (1)':

$$\begin{aligned} f_1^*(\omega) &= (x_1 + x_2)^2 (dx^1 + dx^2) + (x_1 x_2)^2 (x_2 dx^1 + x_1 dx^2) \\ &+ (x_1 - x_2)^2 (dx^1 - dx^2) = \\ &= (x_1 + x_2)^2 dx^1 + (x_1 + x_2)^2 dx^2 + (x_1 x_2)^2 x_2 dx^1 + \\ &+ (x_1 x_2)^2 x_1 dx^2 + (x_1 - x_2)^2 dx^1 - (x_1 - x_2)^2 dx^2 = \\ &= ((x_1 + x_2)^2 + x_1^2 x_2^3 + (x_1 - x_2)^2) dx^1 + \\ &+ ((x_1 + x_2)^2 + x_1^3 x_2^2 - (x_1 - x_2)^2) dx^2 = \\ &= (2(x_1^2 + x_2^2) + x_1^2 x_2^3) dx^1 + (4x_1 x_2 + x_1^3 x_2^2) dx^2 \end{aligned}$$

עכשיו אנחנו רוצים להוכיח $h_1: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ מהתמונה:

$$h_1((x_1, x_2)) = 2(x_1^2 + x_2^2) + x_1^2 x_2^3 \quad \text{וה}$$

$$h_2: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{מהתמונה} \quad h_2((x_1, x_2)) = 4x_1 x_2 + x_1^3 x_2^2,$$

כלומר $(x_1, x_2) \in \mathbb{P}^2$, נכתוב:

έχουμε ότι:

$$f_1^*(\omega_0) = h_1 dx' + h_2 dx^2 \in \text{τοπική ικανονική μορφή.}$$

Άσκηση 10

Δίνεται $\gamma \in C^\infty$ σάρτησης $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με νόμο:

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1^2 x_2^2 x_3^2, (x_1 + x_2 + x_3)^2) \text{ για κάθε } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Δίνεται, ακόμη η 2-διαφορική μορφή ω_0 στον $\mathbb{R}^2$, όπου $\omega_0 = (x_1 x_2) dx' \wedge dx^2$.

Να υπολογιστεί η 2-διαφορική μορφή στον $\mathbb{R}^3$

$$f_2^*(\omega_0).$$

Λύση

Θέτουμε $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με νόμο:

$$g((x_1, x_2)) = x_1 x_2 \text{ για κάθε } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Αρα $\omega_0 = g dx' \wedge dx^2$.

Από τις προτάσεις 2.10 έχουμε:

$$f_2^*(\omega_0) = f_2^*(g \cdot (dx' \wedge dx^2)) = (g \circ f) \cdot f_2^*(dx' \wedge dx^2) \quad (1).$$

Έχουμε τώρα:

$$(g \circ f)((x_1, x_2, x_3)) = g(f(x_1, x_2, x_3)) = g((x_1 x_2 x_3)^2, (x_1 + x_2 + x_3)^2)$$

$$(x_1 x_2 x_3)^2 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)^2 = (x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3))^2, \text{ για } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3. (2)$$

Από την πρόταση 2.13 έχουμε:

$$f_2^*(\partial x^1 \partial x^2) = f_1^*(\partial x^1) \wedge f_1^*(\partial x^2) \quad (3)$$

Από την πρόταση 2.9 παίρνουμε:

$$f_1^*(\partial x^1) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \partial x_j^1 \quad (4) \quad \text{και}$$

$$f_2^*(\partial x^2) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \partial x_j^2 \quad (5), \quad \text{όπου}$$

$$f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \text{όπου:} \quad f_1((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 x_2 x_3)^2$$

$$\text{και} \quad \text{όπου} \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{και}$$

$$f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \text{όπου:} \quad f_2((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 \quad \text{και}$$

$$\text{όπου} \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Έχουμε τώρα:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2x_2^2 x_3^2 x_1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 2x_1^2 x_3^2 x_2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 2x_1^2 x_2^2 x_3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \quad (6).$$

Από την (6) παίρνουμε τώρα:

$$f_1^*(\partial x^1) = 2x_2^2 x_3^2 x_1 \partial x^1 + 2x_1^2 x_3^2 x_2 \partial x^2 + 2x_1^2 x_2^2 x_3 \partial x^3 \quad (7)$$

Ано 7) (6) напвууе ен/сус:

$$f_2^*(\partial x^2) = 2(x_1 + x_2 + x_3) \cdot (\partial x^1 + \partial x^2 + \partial x^3) \quad (8)$$

Ано 7) (7) уаи (8) напвууе:

$$\begin{aligned} f_1^*(\partial x^1) \wedge f_2^*(\partial x^2) &= \\ &= 2x_1 x_2 x_3 (x_2 x_3 \partial x^1 + x_1 x_3 \partial x^2 + x_1 x_2 \partial x^3) \\ &\wedge (2(x_1 + x_2 + x_3)(\partial x^1 + \partial x^2 + \partial x^3)) = \\ &= 4x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_2 x_3 \partial x^1 + x_1 x_3 \partial x^2 + x_1 x_2 \partial x^3) \wedge (\partial x^1 + \partial x^2 + \partial x^3) \\ &= 4x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) \cdot \\ &\quad (x_2 x_3 \partial x^1 \wedge \partial x^2 + x_2 x_3 \partial x^1 \wedge \partial x^3 + x_1 x_3 \partial x^2 \wedge \partial x^1 + x_1 x_3 \partial x^2 \wedge \partial x^3 \\ &\quad + x_1 x_2 \partial x^3 \wedge \partial x^1 + x_1 x_2 \partial x^3 \wedge \partial x^2) = 4x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) \cdot \\ &\quad ((x_2 x_3 - x_1 x_3) \partial x^1 \wedge \partial x^2 + (x_2 x_3 - x_1 x_2) \partial x^1 \wedge \partial x^3 + \\ &\quad + (x_1 x_3 - x_1 x_2) \partial x^2 \wedge \partial x^3) = 4x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) \cdot \\ &\quad (x_3(x_2 - x_1) \partial x^1 \wedge \partial x^2 + x_2(x_3 - x_1) \partial x^1 \wedge \partial x^3 + \\ &\quad + x_1(x_3 - x_2) \partial x^2 \wedge \partial x^3) \quad (9) \end{aligned}$$

Από τις (3) και (9) έχουμε λοιπόν:

$$f_2^*(\partial x' \wedge \partial x^2) = 4x_1x_2x_3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3).$$

$$\left(x_3(x_2 - x_1) \partial x' \wedge \partial x^2 + x_2(x_3 - x_1) \partial x' \wedge \partial x^3 + x_1(x_3 - x_2) \partial x^2 \wedge \partial x^3 \right) \quad (10)$$

Αντίστοιχα για τις (2) και (10) έχουμε:

$$f_2^*(\omega) = 4(x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3))^3.$$

$$\cdot \left(x_3(x_2 - x_1) \partial x' \wedge \partial x^2 + x_2(x_3 - x_1) \partial x' \wedge \partial x^3 + x_1(x_3 - x_2) \partial x^2 \wedge \partial x^3 \right)$$

Ορίζουμε λοιπόν $h_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h_1((x_1, x_2, x_3)) = 4(x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3))^3 \cdot x_3(x_2 - x_1)$$

για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$h_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με αντίστοιχα:

$$h_2((x_1, x_2, x_3)) = 4(x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3))^3 \cdot x_2(x_3 - x_1)$$

για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ και

$h_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με αντίστοιχα:

$$h_3((x_1, x_2, x_3)) = 4(x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3))^3 \cdot x_1(x_3 - x_2)$$

για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Με βάση τους παραπάνω συσχετισμούς έχουμε:

$$f_2^*(\omega) = h_1 \partial x' \wedge \partial x^2 + h_2 \partial x' \wedge \partial x^3 + h_3 \partial x^2 \wedge \partial x^3 \text{ σε}$$

συνήθη καρτεσιανή γλώσσα.

Άσκηση 11

Έστω $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_2^2)$
για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ και $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με
, τότε: $h(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^3$ για κάθε

$(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Θεωρούμε την 3-διαφορίσιμη μορφή
 $\omega_0 = h \cdot (\partial x^1 \wedge \partial x^2 \wedge \partial x^3)$ στον $\mathbb{R}^3$.

α) Να υπολογιστεί η διαφορίσιμη 3-μορφή $f_3^*(\omega_0)$ στον $\mathbb{R}^3$.

β) Θεωρούμε $p = (1, 2, 3)$ και

$$u_1 = (2, 3, 4), u_2 = (3, 4, 5), u_3 = (4, 5, 7)$$

και το $\vec{w} = ((u_1)_p, (u_2)_p, (u_3)_p) \in (\mathbb{R}^3_p)^3$.

Να υπολογιστεί ο αριθμός:

$$((f_3^*(\omega_0))(p))(\vec{w}).$$

Λύση

Από την πρόταση 2.14 έχουμε

$$f_3^*(\omega_0) = (h \circ f) (\det f') \cdot (\partial x^1 \wedge \partial x^2 \wedge \partial x^3).$$

207

Υπολογίστε για $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$(h \circ f)(x_1, x_2, x_3) = h(f(x_1, x_2, x_3))$$

$$= h(x_1 x_2 x_3, x_1^2, x_2^2) = (x_1 x_2 x_3 + x_1^2 + x_2^2)^3 / 1)$$

Έχουμε τώρα, για τις περιγραφόμενες συναρτήσεις f_1, f_2, f_3 και f : $f_1, f_2, f_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ όπου:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \text{ για } \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 \text{ για } \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ και}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 \text{ για } \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= x_2 x_3, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= x_1 x_3, & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} &= x_1 x_2, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= 2x_1, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= 0, & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} &= 0, & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} &= 2x_2, & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

(208)

Έστω $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$

Έχουμε τωρα ότι ο n είναι Jacobian της f στο p είναι
ο n είναι $J(f(p)) = \begin{pmatrix} p_2 p_3 & p_1 p_3 & p_1 p_2 \\ 2p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_2 & 0 \end{pmatrix}$

Έχουμε τώρα:

$$\det J(f(p)) = \begin{vmatrix} p_2 p_3 & p_1 p_3 & p_1 p_2 \\ 2p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= p_1 p_2 \cdot \begin{vmatrix} 2p_1 & 0 \\ 0 & 2p_2 \end{vmatrix} = 4p_1^2 p_2^2, \text{ όπου αναγνωρίζουμε την}$$

ορίσθηκε ως προς τα στοιχεία του 3×3 ελάττω.

Αρα έχουμε:

$$(h \circ f)(p) = (p_1 p_2 p_3 + p_1^2 + p_2^2)^3 \text{ για κάθε } p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{και} \quad \det f'(p) = \det J(f(p)) = 4p_1^2 p_2^2 \text{ για κάθε } p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Εξομμε τωρα

$$u_1 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3, \quad u_2 = 3e_1 + 4e_2 + 5e_3 \quad \text{και}$$

$$u_3 = 4e_1 + 5e_2 + 7e_3. \quad \text{Ενω εξομμε οτι:}$$

$$u_i = \sum_{j=1}^3 b_{ij} e_j \quad \text{για καθε } i=1, 2, 3 \quad \text{δνω}$$

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Εξομμε } \det(b_{ij}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \left(\left(-\frac{1}{2}\right)(-1) - (-1)(-1) \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - 1 \right) =$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Από την παρατήρηση 2.15 έχουμε

$$((f_3^*(\omega))(p))(\vec{w}) = (h \circ f)(p) \cdot \det f'(p) \cdot \det(\vec{w}_j).$$

Αρα για $p = (1, 2, 3)$ έχουμε:

$$(h \circ f)(p) = (1 \cdot 2 \cdot 3 + 1^2 + 2^2)^3 = 11^3 = 1331$$

$$\det f'(p) = 4 \cdot 1^2 \cdot 2^2 = 16.$$

$$\text{Αρα: } ((f_3^*(\omega))(p))(\vec{w}) = 1331 \cdot 16 \cdot (-1) = -21296.$$

Άσκηση 12

Δίνεται η διαφορική 2-μορφή στον $\mathbb{R}^2$

$$\omega = (2x_1 - 3x_2) dx_1 + (4x_1 - 5x_2) dx_2 \text{ αρα η}$$

συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με νόμο:

$$f((x_1, x_2)) = (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2, x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) \text{ για}$$

$$\text{αφ'όπου } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Να υπολογιστεί η 2-διαφορική μορφή στον $\mathbb{R}^2$

$$f_2^*(d\omega)$$

Λύση

Εξ' ορισμού έχουμε:

$$d\omega_0 = d(2x_1 - 3x_2) \wedge dx' + d(4x_1 - 5x_2) \wedge dx''$$

Θέτουμε $g_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $g_1(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2$

και

$g_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $g_2(x_1, x_2) = 4x_1 - 5x_2$

για κάθε $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Έτσι έχουμε με βάση του παραπάνω αλγεβρικού:

$$d\omega_0 = dg_1 \wedge dx' + dg_2 \wedge dx'' \quad (1)$$

Οι υπολογίζουμε τώρα τις dg_1, dg_2 από τις προτάσεις 2.3

$$\text{Έχουμε: } \frac{\partial g_1}{\partial x_1} = 2 \quad \text{και} \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_2} = -3 \quad \text{Άρα}$$

$$dg_1 = 2dx' - 3dx'' \quad (2)$$

Αντίστοιχα έχουμε:

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = -5 \quad \text{Άρα}$$

$$dg_2 = 4dx' - 5dx'' \quad (3)$$

Από την (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} dg_1 \wedge dx' &= (2 dx' - 3 dx^2) \wedge dx' = \\ &= (2 dx') \wedge dx' + (-3 dx^2) \wedge dx' = \\ &= 2 dx' \wedge dx' - 3 dx^2 \wedge dx' = \\ &= 0 + (-3) (-1) dx' \wedge dx^2 = \\ &= 3 dx' \wedge dx^2 / 4. \end{aligned}$$

Από την (3) έχουμε:

$$\begin{aligned} dg_2 \wedge dx^2 &= (4 dx' - 5 dx^2) \wedge dx^2 = \\ &= (4 dx') \wedge dx^2 + (-5 dx^2) \wedge dx^2 = \\ &= 4 dx' \wedge dx^2 + (-5) dx^2 \wedge dx^2 = 4 dx' \wedge dx^2 / 5 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας από την (4) και (5) στην (1) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} d\omega_0 &= 3 dx' \wedge dx^2 + 4 dx' \wedge dx^2 \quad \text{επίσης, ιδιότητα διαφορών δ-χ} \\ &= (3+4) dx' \wedge dx^2 = 7 dx' \wedge dx^2 (6). \end{aligned}$$

Από την (6) τώρα και την ερμηνεύουμε την ανακάλυψη

f_2^* παίρνουμε:

$$f_2^*(d\omega_0) = f_2^*(7 dx' \wedge dx^2) = 7 f_2^*(dx' \wedge dx^2) (7).$$

(213)

Από την πρόταση 2.13 έχουμε τώρα

$$f_2^*(\partial x' \wedge \partial x'') = f_1^*(\partial x') \wedge f_1^*(\partial x'') \quad (8).$$

Από την πρόταση 2.9 έχουμε τώρα:

$$f_1^*(\partial x') = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \partial x' + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \partial x'' \quad (9) \quad \text{και}$$

$$f_1^*(\partial x'') = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \partial x' + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \partial x'' \quad (10), \text{ όπου}$$

f_1, f_2 είναι οι συντεταγμένες συναρτήσεις της f .
 Δηλαδή: $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με νόμο:

$$f_1((x_1, x_2)) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \quad \text{και}$$

$$f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με νόμο:}$$

$$f_2((x_1, x_2)) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2, \text{ για κάθε}$$

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Έχουμε τώρα:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 2x_1 + x_2, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= x_1 + 2x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= 2x_1 - x_2, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= 2x_2 - x_1 \end{aligned} \right\} (11).$$

(214)

Αντιστοιχώντας τις από τις (11) έχουμε:

$$f_1^*(dx') = (2x_1 + x_2)dx' + (x_1 + 2x_2)dx^2 \quad (12)$$

Αντιστοιχώντας τις από τις (11) έχουμε:

$$f_2^*(dx^2) = (2x_1 - x_2)dx' + (2x_2 - x_1)dx^2 \quad (13)$$

Από τις (12) και (13) και την επιμερική σχέση του εσωτερικού γινομένου διαφορικών μορφών ως ηρώτων ηρώσεων παίρνουμε πάλι:

$$\begin{aligned} f_1^*(dx') \wedge f_2^*(dx^2) &= \\ &= ((2x_1 + x_2)dx' + (x_1 + 2x_2)dx^2) \wedge ((2x_1 - x_2)dx' + (2x_2 - x_1)dx^2) = \\ &= ((2x_1 + x_2)dx') \wedge ((2x_1 - x_2)dx' + (2x_2 - x_1)dx^2) + \\ &+ ((x_1 + 2x_2)dx^2) \wedge ((2x_1 - x_2)dx' + (2x_2 - x_1)dx^2) = \\ &= ((2x_1 + x_2)dx') \wedge ((2x_1 - x_2)dx') + \\ &+ ((2x_1 + x_2)dx') \wedge ((2x_2 - x_1)dx^2) + \\ &+ ((x_1 + 2x_2)dx^2) \wedge ((2x_1 - x_2)dx') + \\ &+ ((x_1 + 2x_2)dx^2) \wedge ((2x_2 - x_1)dx^2) = \\ &= (2x_1 + x_2)(2x_1 - x_2)dx' \wedge dx' + (2x_1 + x_2)(2x_2 - x_1)dx' \wedge dx^2 + \\ &+ (x_1 + 2x_2)(2x_1 - x_2)dx^2 \wedge dx' + (x_1 + 2x_2)(2x_2 - x_1)dx^2 \wedge dx^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (2x_1 + x_2)(2x_2 - x_1) \partial x' \wedge \partial x^2 - (x_1 + 2x_2)(2x_1 - x_2) \partial x' \wedge \partial x^2 = \\
 &= ((2x_1 + x_2)(2x_2 - x_1) - (x_1 + 2x_2)(2x_1 - x_2)) \partial x' \wedge \partial x^2 = \\
 &= 4(x_2^2 - x_1^2) \partial x' \wedge \partial x^2 \quad (14).
 \end{aligned}$$

Αντιμεθεωρώντας πάλι από την (14) έχουμε (8) παίρνουμε:

$$f_2^* (\partial x' \wedge \partial x^2) = 4(x_2^2 - x_1^2) \partial x' \wedge \partial x^2 \quad (15)$$

Αντιμεθεωρώντας πάλι από την (15) έχουμε (7) παίρνουμε:

$$f_2^* (\partial \omega_0) = 7 \cdot (4(x_2^2 - x_1^2) \partial x' \wedge \partial x^2) = 28(x_2^2 - x_1^2) \partial x' \wedge \partial x^2.$$

Για την συνέχεια θα δούμε και υπόλοιπες σχέσεις από το πρώτο μέρος των συλλογισμών.

Θα συμβολίζουμε ως βάση $e_1 = (1, 0)$ και $e_2 = (0, 1)$ για την γραμμική βάση του $\mathbb{R}^2$.

Άσκηση 13

Θεωρούμε τον 2-σταυρό $S \in \mathcal{T}^2(\mathbb{R}^2)$ για τον οποίο ισχύει:

$$\begin{aligned}
 &1) S(e_1, e_1) = 1, \quad 2) S(e_1, e_2) = 2, \\
 &3) S(e_2, e_1) = 3, \quad 4) S(e_2, e_2) = 4.
 \end{aligned}$$

Να υπολογιστεί ο αριθμός $S(u_1, u_2)$ όπου

$$u_1 = (2, 3), \quad u_2 = (4, -5)$$

Πρόβλημα

Προφανώς, έχουμε: $u_1 = 2e_1 + 3e_2$ και $u_2 = 4e_1 - 5e_2$.

Θέλουμε $S_{i,j} = S((e_i, e_j))$ για $i, j \in \{1, 2\}$ για
απλοποίηση συμβολισμού.

Τότε από την σχέση SP των γραμμών συχνοτήτων
έχουμε (βλέπε $*$)

$$\begin{aligned} S((u_1, u_2)) &= 2 \cdot 4 S_{1,1} + 2(-5) S_{1,2} + 3 \cdot 4 S_{2,1} + 3(-5) S_{2,2} = \\ &= 8 \cdot 1 - 10 \cdot 2 + 12 \cdot 3 - 15 \cdot 4 = 44 - 80 = -36 \end{aligned}$$

Άσκηση 14

Θεωρούμε τον 2-γραφο $G \in \mathcal{G}^2(\mathbb{F}_2^2)$ για τον
οποίο ισχύουν:

- 1) $S((u_1, u_2)) = 1$ για $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (-3, 1)$
- 2) $S((u_3, u_4)) = 2$ για $u_3 = (3, 1)$, $u_4 = (-2, 1)$
- 3) $S((u_5, u_6)) = 3$ για $u_5 = (2, 1)$, $u_6 = (-1, 1)$
- 4) $S((u_7, u_8)) = 4$ για $u_7 = (1, 1)$, $u_8 = (-2, 1)$

Να υπολογιστεί ο αριθμός:

$$S((u_9, u_{10})), \text{ όπου } u_9 = (-1, -1) \text{ και } u_{10} = (1, 2018)$$

Θέτουμε $S((e_i, e_j)) = S_{i,j}$ για $i, j \in \{1, 2\}$ για

αντιστάθμιση συμβολισμών

Από την σχέση (*) , εείδω σε τω πρώτων συμβολισμών έχουμε:

$$\begin{aligned} S((u_1, u_2)) &= 1 \cdot (-3) S_{1,1} + 1 \cdot 1 S_{1,2} + 1 \cdot (-3) S_{2,1} + 1 \cdot 1 S_{2,2} = \\ &= -3 S_{1,1} + S_{1,2} - 3 S_{2,1} + S_{2,2} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S((u_3, u_4)) &= 3 \cdot (-2) S_{1,1} + 3 \cdot 1 S_{1,2} + 1 \cdot (-2) S_{2,1} + 1 \cdot 1 S_{2,2} = \\ &= -6 S_{1,1} + 3 S_{1,2} - 2 S_{2,1} + S_{2,2} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S((u_5, u_6)) &= 2 \cdot (-1) S_{1,1} + 2 \cdot 1 S_{1,2} + 1 \cdot (-1) S_{2,1} + 1 \cdot 1 S_{2,2} = \\ &= -2 S_{1,1} + 2 S_{1,2} - S_{2,1} + S_{2,2} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S((u_7, u_8)) &= 1 \cdot (-2) S_{1,1} + 1 \cdot (-1) S_{1,2} + 1 \cdot (-2) S_{2,1} + 1 \cdot 1 S_{2,2} = \\ &= -2 S_{1,1} - S_{1,2} - 2 S_{2,1} + S_{2,2} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\text{Θέτουμε τώρα } S_{1,1} = x, S_{1,2} = y, S_{2,1} = z, S_{2,2} = w \quad (5)$$

(218)

Αντικαθιστώντας στο 715 (5) βγύ (1), (2), (3) και (4)
και λαμβάνοντας υπόψη τις 1), 2), 3) και 4) τις
υπόθεσες της άσκησης παίρνουμε:

$$\left. \begin{aligned} -3x + y - 3z + w &= 1 \\ -6x + 3y - 2z + w &= 2 \\ -2x + 2y - z + w &= 3 \\ -2x - y + 2z + w &= 4 \end{aligned} \right\} (\Sigma)$$

Αρα για να υπολογίσουμε τις $S_{1,1}$, $S_{1,2}$, $S_{2,1}$ και $S_{2,2}$
πρέπει να λύσουμε το γραμμικό σύστημα Σ των
υποθέσεων με 4 άγνωστος.

Η ορίζουσα του συστήματος Σ είναι

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 & 1 \\ -6 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 36 \neq 0.$$

Αρα ως γνωστόν από τη γραμμική άλγεβρα αφού $D \neq 0$
το σύστημα Σ έχει μοναδική λύση. Θα τις προσδιορίσουμε
με τον κανόνα του Cramer. Υπολογίσουμε τις ορίζουσες
 D_x, D_y, D_z, D_w του συστήματος.

Example:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 & 1 \\ -6 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

$$D_z = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 26$$

$$D_w = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 & 1 \\ -6 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 118$$



(220)

Από τον κανόνα του Cramer έχουμε:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3},$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}, \quad w = \frac{D_w}{D} = \frac{118}{36} = \frac{59}{18}$$

Από την (5) έχουμε:

$$S_{1,1} = \frac{1}{6}, \quad S_{1,2} = \frac{7}{18}, \quad S_{2,1} = \frac{23}{18}, \quad S_{2,2} = \frac{59}{18}.$$

Τώρα από την σχέση (*) στη σελίδα 58 των πρώτων βιβλίων έχουμε:

$$\begin{aligned} S(u_9, u_{10}) &= (-1) \cdot 1 S_{1,1} + (-1) \cdot 2018 S_{1,2} + (-1) \cdot 1 S_{2,1} + \\ &+ (-1) \cdot 2018 S_{2,2} = -\frac{1}{6} - 2018 \cdot \frac{7}{18} - \frac{13}{18} - 2018 \cdot \frac{59}{18} = \\ &= -\frac{66.602}{9} = -7.400,222... \end{aligned}$$

Με τις παραπάνω αριθμούς ολοκληρώνουμε τους βασικούς τύπους αριθμών αυτού του μεφάλαου.

Στη συνέχεια τελειώνουμε αυτό το μεφάλαο παραθέτοντας κάποιες άλλες υπολογιστικές αριθμούς με την ανάλυση τους για την εμπεδωση των παραπάνω βασικών αριθμών.

Άσκησεις αβελικές

Στην συνέχεια παραθέτουμε κάποιες άλλες ασκήσεις.
Οι ασκήσεις αυτές είναι παρόμοιες με τις ασκήσεις
που δόθηκαν παραπάνω και δίνονται για εξάσκηση.
Δίνεται εντός και η ανήλπιση τους στο τέλος.

Άσκηση 15

Θεωρούμε ένα 2-γραφο $T \in \mathcal{T}^2(\mathbb{H}^2)$.

Έστω $u_1, u_2, u_3, u_4 \in (\mathbb{H}^2)^2$, διαφορετική ανα δυο.

Έστω $a_i = T(u_i)$ για $i=1,2,3,4$ (1), $a_i \in \mathbb{H}$.

Υποθέτουμε ότι ο T είναι ο μοναδικός 2-γραφος
του βιόλου $\mathcal{T}^2(\mathbb{H}^2)$ που ικανοποιεί τις (1)

παραπάνω.

Αν του διανόμεμα $u_i \in (\mathbb{H}^2)^2$, για $i=1,2,3,4$ είναι,

γνωστά μαθώς και οι πραγματικοί αριθμοί $a_i = T(u_i)$

για $i=1,2,3,4$, περιγράψτε λεπτομερώς μια διαδικασία
(ας πούμε ένα αλγόριθμο) με την οποία μπορούμε να
υπολογίσουμε το $T(x)$, για κάθε $x \in (\mathbb{H}^2)^2$.

Υπόδειξη: Να ακολουθήσετε τη μεθοδολογία της
διδασκίας 14.

Άσκηση 16

Να λύσετε την άσκηση 1 στην σελίδα 135 των πρώτων σημειώσεων εφ'αφ'όσον τον τύπο των η-ταυσετών στον $\mathbb{P}^n$ στην σελίδα 172 αυτών των σημειώσεων. Η άσκηση 1 έχει λύση με βάση μόνο τους ορισμούς, ενώ ο τύπος μας δίνει ενδιαφέρον αποτέλεσμα.

Άσκηση 17

Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}$ με τύπους:
 $f_1((x_1, x_2, x_3)) = x_1 x_2$, $f_2((x_1, x_2, x_3)) = x_2 x_3$,
 $f_3((x_1, x_2, x_3)) = x_1 x_3$ για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^3$.
 Δίνεται η 2-διαφορική μορφή στον $\mathbb{P}^3$ με τύπο:

$$\omega_0 = f_1 \partial x^1 \wedge \partial x^2 + f_2 \partial x^2 \wedge \partial x^3 + f_3 \partial x^1 \wedge \partial x^3$$

Να υπολογίσετε τον αριθμό

$$(\omega_0(p_0))(x_0), \text{ όπου } p_0 = (1, -1, 1) \text{ και}$$

$$x_0 = ((u_1)_{p_0}, (u_2)_{p_0}) \text{ και } u_1 = (-1, 1, 1) \text{ και}$$

$$u_2 = (1, 1, -1).$$

Υπόδειξη

Να δουλέψετε ανάλογα με την δέσμευση 2 στην
σελίδα 145 των πρώτων συγγραμμάτων.

Βασικό υλικό της δέσμης αυτής είναι ο τόμος (25)
στην σελίδα 251 των πρώτων συγγραμμάτων, το οποίο
θα πρέπει να μελετήσετε να τον βρείτε. Εμπρόσθιοι
σε αυτόν τον τόμο βγαίνουν αρχίστες το αποτέλεσμα.

Συμπερασμα : Χρησιμοποιούμε από την θεωρία ότι

$$\alpha x^i(p) = (e_i)^* \text{ για κάθε } i=1,2,3 \text{ και } p \in \mathbb{R}^3$$

Απάντηση : 4

Παρατήρηση

Αν στα ερωτήματα ημερίδας σας την 26 ή 17
παράγεται (το ποσό για από τις 2) θα πρέπει να την
λύσετε με την μεθοδολογία των συγγραμμάτων όπως είναι
στην συγγραμμάτων. Δεν θα είναι δυνατόν "εφαρμοσμένα" λύσεις
με τον τόμο στην σελίδα 172 των πρώτων συγγραμμάτων
ή τον τόμο (15) στην σελίδα 151 των συγγραμμάτων.
Αυτό δεν είναι βέβαια για να σας βασανίσουμε, αλλά
για τον αποτελεσματικό λόγο ότι με αυτές τις δυο ερωτήσεις
μπορούμε να διατηρούμε την ισορροπία του φοιτητή σε
μέγιστο και ουσιαστικό μέρος της θεωρίας.

Επί, αυτές οι δύο σχέσεις (α, δεν τολμάει, διαφορετική) θα πρέπει να λυθούν χρησιμοποιώντας μόνο τους ορίσμούς.

Παρατήρηση

Παρατηρήστε ότι στον τόπο (15) της σελίδας 151 το πο δεν παύει να είναι ρόλο στον υπολογισμό!

Φυσικά εννοείται ότι μπορείτε να απομνημονεύσετε (και πρέπει) τους παραπάνω τύπους για να μπορείτε να πρεσβέρετε τη αποτελεσματική που θέλετε να πάρετε και στη περίπτωση που σας ζητηθεί να τους εφαρμόσετε αποτελεσματικά.

Άσκηση 18

Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους: $f_1((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + x_2$, $f_2((x_1, x_2, x_3)) = x_1 - x_2$, $f_3((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + x_3$, $f_4((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$, $f_5((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2$, $f_6((x_1, x_2, x_3)) = x_2 + x_3$ για κάθε $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Θεωρούμε τη διαφορίσιμη 1-μορφή στον $\mathbb{R}^3$, ω και η, όπου: $\omega = f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + f_3 dx^3$ και

$$\eta = f_4 dx^1 + f_5 dx^2 + f_6 dx^3.$$

Να γράψετε την διαφορίσιμη 2-μορφή $\omega \wedge \eta$ στον $\mathbb{R}^3$ σε τυπική κανονική μορφή.

Απάντηση

$$\omega \wedge \eta = g_1 \, dx^1 \wedge dx^2 + g_2 \, dx^2 \wedge dx^3 + g_3 \, dx^1 \wedge dx^3,$$

όπου $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τόνους:

$$g_1((x_1, x_2, x_3)) = 2x_2^3$$

$$g_2((x_1, x_2, x_3)) = x_1x_2 + x_1x_3 - x_2^2 - x_2x_3 - x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_2^2 - x_3x_1^2 + x_1x_2x_3 - x_3x_2^2 \quad \text{και}$$

$$g_3((x_1, x_2, x_3)) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 - x_1^3 - x_1^2x_2 - x_1x_2^2 - x_3x_1^2 - x_1x_2x_3 - x_3x_2^2, \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Άσκηση 19

Δίνεται η συνάρτηση με τόνο $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, όπου:

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

α) Να προσδιοριστεί το διαφορίο df

β) Να βρεθεί το $df(p)$ για $p = (1, n)$, όπου

$n = 3, 4, \dots$ (ο γνωστός αριθμός του μήκους ενός κύκλου

δici πιν διήμετρο του)

γ) Να υπολογιστεί ο αριθμός $(df(p))(u_p)$, όπου

$$u = (n, n) \in \mathbb{R}^2, \quad p = (1, n).$$

Ανάλυση

α) $df = g_1 dx^1 + g_2 dx^2$, όπου $g_1, g_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με
 $g_1((x_1, x_2)) = x_2 \cos(x_1, x_2)$, $g_2((x_1, x_2)) = x_1 \cos(x_1, x_2)$

για $u \neq 0 \in (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

β) $df(p): \mathbb{R}_p^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $p \in \mathbb{R}^2$:

$(df(p))(u_p) = (p_2 u_1 + p_1 u_2) \cdot \cos(p_1, p_2)$ για

$u \neq 0 \in u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$.

Ε761

$df(p)(u_p) = (n u_1 + u_2) \cdot \cos(n) = -(n u_1 + u_2)$, για

$p = (1, n)$, για $u \neq 0 \in u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$

γ) $(df(p))(u_p) = -(n^2 + n)$, για $u = (n, n)$, $p = (1, n)$.

Άσκηση 20

Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με
 τόνους: $f_1((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 x_2 x_3$, $f_2((x_1, x_2, x_3)) = x_1 x_2^3 x_3$

$f_3((x_1, x_2, x_3)) = x_1 x_2 x_3^4$, για $u \neq 0 \in (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Έστω ω 1-διαφορική μορφή ω στον $\mathbb{R}^3$, όπου:

$\omega = f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + f_3 dx^3$.

Να γραφεί η διαφορική μορφή ω σε τμητική και συνιτική μορφή.

Απάντηση :

$$\omega = g_1 dx^1 \wedge dx^2 + g_2 dx^2 \wedge dx^3 + g_3 dx^1 \wedge dx^3,$$

όπου : $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τήνους:

$$g_1((x_1, x_2, x_3)) = x_2^3 x_3 - x_1^2 x_3,$$

$$g_2((x_1, x_2, x_3)) = x_1 x_3^4 - x_1 x_2^3$$

$$g_3((x_1, x_2, x_3)) = x_2 x_3^4 - x_1^2 x_2, \text{ για } \eta\theta\epsilon((x_1, x_2, x_3)) \in \mathbb{R}^3.$$

Άσκηση 21

Δίνεται η C^∞ σφαίρα $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$\text{τήνους } f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1^2 x_2 x_3, x_1 x_2^2 x_3) \text{ και}$$

η 2-διαφορική μορφή στον $\mathbb{R}^2$: $\omega = g \cdot (dx^1 \wedge dx^2)$,

$$\text{όπου } g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τήνους } g((x_1, x_2)) = x_1^2 + x_2^2 (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Να γραφεί σε τμητική και συνιτική μορφή η

2-διαφορική μορφή $f_2^*(\omega)$ στον $\mathbb{R}^3$.

Απάντηση

$$f_2^*(\omega) = h \cdot (g_1 dx^1 \wedge dx^2 + g_2 dx^2 \wedge dx^3 + g_3 dx^1 \wedge dx^3)$$

όπου $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1, g_2, g_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με :

$$h((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 x_2 x_3)^3 (x_1^2 + x_2^2),$$

$$g_1((x_1, x_2, x_3)) = x_1 x_2 x_3$$

$$g_2((x_1, x_2, x_3)) = -x_1^2 x_2$$

$$g_3((x_1, x_2, x_3)) = x_1 x_2^2 \quad , \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

ή αλλιώς:

$$f_2^*(\omega) = h g_1 dx^1 \wedge dx^2 + h g_2 dx^2 \wedge dx^3 + h g_3 dx^1 \wedge dx^3$$

Άσκηση 22

Δίνεται η διαφορική 1-μορφή στο $\mathbb{R}^2$

$$\omega_0 = g_1 dx^1 + g_2 dx^2, \text{ όπου } g_1, g_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπους:}$$

$$g_1((x_1, x_2)) = x_1^2 x_2 \text{ και } g_2((x_1, x_2)) = x_1 x_2^2 \text{ για κάθε}$$

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Δίνεται επίσης η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο:

$$f((x_1, x_2)) = ((x_1 + x_2)^2, (x_1 - x_2)^2), \text{ για κάθε } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Να υπολογιστεί η 2-διαφορική μορφή στον $\mathbb{R}^2$

$$f_2^*(\omega_0).$$

Απάντηση:

$$f_2^*(\omega_0) = h \cdot (dx^1 \wedge dx^2), \text{ όπου } h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{με } h((x_1, x_2)) = 64 x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4) \text{ για κάθε } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$